特殊相対論に付いて
青木の個人的な目で特殊相対論を作り上げる。

これまでの物理の対象

物理学発展の歴史を簡単にたどってみよう。物理は自然科学だと言われる。先ず最初の段階は自然現象の観察と分類から始まる。分類を効率良く行うためには、ある種の抽象化と概念形成が必要である。抽象化と概念形成は、発展の各段階で行われるので、今後いちいち述べない。次の段階は、現象間の相関や因果関係を定性的に調べ、説明するという段階に進む。更に定量的に議論を進める為に、物理量に単位を導入し単位量の倍数で対象量を表現する。複数の物理量の間の定量的な関係式が見出され、各種の法則が提案される。各種の法則を統合して、基本法則に作り上げられて有る意味で、完成の域に達する。

次の段階に登場するのは、各領域で完成の域に達した物理法則を鑑賞して、その法則に中に法則を見付ける事である。例えて言えば、日本の法律をじっくりと勉強した後で、" 全ての日本の法律は日本語で書いてある" という事を背景に有る規則であると述べる様なものである。ひょっとして、日本の法律は日本語で書けと何かの法律で義務付けられているのかな?

物理量とその属性

物理量を定量的に表現する手段として、基本的な大きさをきめて、これを単位量とすると先に述べた。単位量を明示して始めて物理量の大きさを述べることが出来るという意味で、物理量はその属性として次元を持つ。良く知られている様に、物理量の間の大小関係や等しいといった比較操作が意味を持つ為には、比較される両者が同じ次元を持つ必要がある。この比較可能性の必要条件は、あまりにも基本的な為に名前がついていない。しかしこれは必要条件であって、充分条件でない事は次の例を見れば分かる。トルク (力のモーメント) と仕事はどちらも、力・距離 の次元を有するが比較してはいけない。"自然" 単位系を使えば、もっと沢山の例を示すことが可能だろう。

他にも、時間の向きを変えた時に符号を変える物理量と、符号を変えない物理量がある。このような物理量も本来比較してはいけない。しかし、やっている事も時にはある。例えばオームの法則をベクトル形式で書くと、

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}。$$

左辺の電流密度は時間の向きを変えると符号が変わるが、右辺では電気伝導度 σ も、電場 $\mathbf{E}$ も符号を変えない。

ある人は水晶の単結晶は、ある軸の周りに６０度回すと元に戻ると言う。しかし別の人は、エッチングにより右水晶と左水晶を区別し、１２０度回さないと元に戻らないと言うだろう。即ち水晶の単結晶という物理量は、６(３) 回対称軸を持つという属性を有する。これらの物理量が有する属性は不連続な変換に対する属性であった。しかしベクトルやスカラーであるという属性は座標系を、原点を固定して、連続的に (微小量だけ) 回転したときの変換性で定義されている性質であった。先のトルクと仕事の例で、比較してはいけない理由として、トルクはベクトルであるが、仕事はスカラーであるという事実を挙げる事が出来る。このように、次元以外の属性を物理量が持っていることに気が付く。ベクトルにも 2 種類あり、鏡映により符号を変えない軸性 (擬) ベクトルと符号を変える極性ベクトルがある。軸性ベクトル

と極性ベクトルを比較してはいけない。比較してさえいけない物理量を等値することなぞはもっての他である。この様な変換に対してどのような変換性を有するかという事も、物理量の持つ非常に大切な属性である。

このように、変換性ではっきりと定義出来る属性以外に、言葉と感覚でしか未だに定義できていない物理的属性もある。美しいとか、心地よい薫り等はたしかに有る種の属性ではあるが現在のところ定量性は備えていない。もう少し物理的な例としては、示強的量と示量的量とを挙げる事が出来る。示量的な物理量は足し算の対象になるが、示強的な物理量を足し算することには、意味が有る場合と無意味な場合がある。例えば、２０度の水と３０度の水を加えても、５０度の水は入手できない。この場合、水温は示強的な物理量だからである。これに反して、２０個のりんごと３０個のりんごを加えて５０個のりんごというのは意味が有る。個数というのは、示量的物理量だからである。

物理法則を A=B と書いたとき、A と B の属性は完全に同じでなければならないというのが、先の次元が同じ物理量でないと比較してはいけないという法則の一般化である。A = B という式は、 A+(−B)=0 と変形できるから、物理量 A と B を加える事が出来る為にも、両者は完全に同じ属性を持つ必要がある。

次に、数に付いても言葉を添えておこう。先ず、単位を一つ決める。この単位の整数倍の量に対して、整数を割り当てる事には疑問が無い。有理数倍の量に対して、有理数を割り当てることも妥当だと思える。しかし、実数となると躊躇したくなる。解析学を学んだ人は、最初に実数の稠密性という概念から入る。これは、最初に述べた物の数を数えるという作業からかなりの抽象化を経て到達した概念であり、atomism を信奉している現在の物理学者は、完全な連続性を物理に持ち込む事に抵抗を覚えるのではないだろうか？勿論、近似的な概念として非常に有用だから、この道具をお借りしましょうという事だとしておこう。実数には、代数的数と超越数という区別も有る。ある場合には、物理量を表現する関係式が

$$\text{代数的数} + (\text{超越数}) \times (\text{代数的数}) = 0$$

という関係式で表現できる場合がある。この一つの方程式は 2 つの方程式に還元出来るといった、応用も考えられる。数には、１元数、２元数、４元数等の拡張もあり、更に行列へも拡張可能である。

数にも各種の属性があり、整数 = 自然数といった関係式は一般には成立しないし、はっきりと数の概念を限定せずに、又はどの段階で拡張が必要になったかを認識せずに 1 元数と 2 元数を混ぜ合わせるのも、考え物である。

古典物理の基本方程式

先ず、ニュートン力学の方程式を以下の様に書く。

$$\nabla V + \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

この方程式は、全体として見ると、単に保存則を書いているだけの様に見える。第 1 項はポテンシャル V で与えられる“ 場 ”の勾配であり、第 2 項は“ 粒子 ”の運動量に関係している。“ 場 ”の量と“ 粒子 ”の運動量とを結びつけているという意味で、気持の悪い物理法則

である。しかし一つ注意しておくと、運動方程式 (の一部は)

$$\mathbf{p} = \nabla W$$

と母関数 W を用いて書ける。この式は、波の進行方向 (運動量) が波面 (W = 一定) に直交していると言っているのでニュートンの運動方程式は、波を記述する方程式だと言っても良い。

又、式 (1) の変わりに、Lagrangean を用いた Eular の式を書き下しても、以下の議論に支障はない。

Maxwell の方程式を次の様に書く。

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{i}, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{4}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

(2)、(4) 式はクーロンの静電気及び静磁気に関する法則である。電荷の存在と、磁荷の不存在を述べていると物の本には書いてある。重ね合わせの原理が成立する事も、この式から読み取れる、非常に大切な点である。しかし、もっと大切な点は、我々がユークリッド空間に住んでいるという事だと考える。この主張は積分形式で表現するほうが分かりやすい。点電荷 q と、面電荷密度 σ が一様な" 帯電面 "との間の引力 (斥力) を考える。この力は、以下の量に比例する。

$$q\sigma\frac{d\Omega}{4\pi}$$

$d\Omega$ は" 帯電面 "が点電荷を見込む立体角である。右辺の後半部分を見れば、力は立体角に比例し、分母の４πを見ると、" 帯電面 "が全空間の内のどれだけの部分を占めているかという割合に比例している事を示している。この式は、我々がユークリッド空間に住んでいる事を示している。物理量の関係式を書き下しながら物理を発展させていく過程では、我々がユークリッド空間に住んでいるかどうかという事は証明された事実では無く、作業を開始するための仮説であった。クーロンの法則を詳しく調べる事が、空間の一様性を調べる上で非常に大切な事であると言える。４πという定数をクーロンの法則に登場させることは、この意味で" 理の有る "事であることが分かる。

もう一つの議論をここで追加しよう。昔は、クーロンの法則を利用して電荷を定義しようとしたことがある。クーロンの法則と力から、電荷を定義すると、電荷は力学量に付随した属性という事を主張した事になる。電荷が力学に付随した属性だと仮定してみよう。我々は、電荷が保存する事を知っている。物理量が保存するという事は、何かある変換に対し物理が不変であるという事である。しかし電荷保存からどのような力学的な保存則又は不変性が導けるかを知らない。一方、電荷保存はゲージ不変という電磁ポテンシャルの性質と強く結び付いている事は知っている。この事実は、電荷は力学量とは無関係は物理量であることを主張する。従って、クーロンの法則を記述するときに異なる属性を有する物理量の間の変換性

を担保する (異なる概念を結びつける) 定数が必要であり、４π以外に、誘電率や透磁率が絶対的に必要であると言える。

クーロンの法則は、時間的な変化を無視出来るという境界条件の下で、その成立が確認された法則であるが、これを時間的に変化する様な場合にも成立すると、強引にきめつける事にする。このきめつけは、現在のところ破綻していないようである。

残りの、Maxwell の方程式には、Biot-Savart の法則と Faraday の電磁誘導の法則、及び電荷保存の法則が考慮されている。

これだけでは議論が進まないので、以下の構成方程式を追加する。

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \text{ and } \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

この構成方程式を、Maxwell の方程式に代入し、**D** と **H** とを消去する。

次にするべき事は、これら５個の方程式の 構造 をじっと見る事である。そして、時間と空間に関する連立の１階微分方程式である事に気が付けば、特殊相対論を作る仕事はほぼ終了である。但し、時間微分と空間微分では (独立変数の次元が異なるので) 属性が異なる。この点は、時間を独立変数に取らずに、一定速度と時間との積を独立変数に取り直す事で解決される。そうすると、上に記した観察の結果、

物理法則は、時間と空間でつくられる４次元空間内での回転に対して不変な形をしているべきである

という特殊相対性の要請が思い浮かぶだろう。(３)・(５) 式で、空間微分に対する時間微分の符号が異なる事に注意しておこう。この事実は、時間と空間の非対称性を示している。即ち、この４次元空間はユークリッド空間ではない。４次元空間の独立変数を数字で表すときには、時間と空間のこの非対称性を明示するために、時間座標を０、空間座標を１、２、３とするのが良い。０は整数ではあるが自然数ではないと言うことが、時間成分の特殊性を保持している。時間成分と空間成分が対等でないと言うことは、日常的に経験される事でもある。

特殊相対論に於ける、マイケルソンとモーレーの実験の役割

Michelson-Morley の実験が特殊相対論の基礎になっていると、青木の目から見ると、誤解している論調を時に見掛ける。又、多くの特殊相対論の教科書では、この実験の解説にそれなりのページ数をさき、特殊相対性の要請にはあまりページを割いていない。特殊相対性こそが特殊相対論の基本であり、Michelson-Morley の実験はこの基本的原理からすると、ほんの付けたし程度の意味しか持たない。この誤解を解くために、この節を書いた。先ず、光の早さを異なる座標系で測定したとする。光は横波であることを知っている。一方、波には縦波と横波が有ることも知っている。横波成分の速度だけを測定して、縦波成分を含む現象全体に付いて何かを云々するのは勇足である。電磁波の発生について計算した事の有る人は、湧き口から遠く離れたところでのみ、$1/r^2$ に関係する輻射が存在し、$1/r^3$ やそれ以上の高次項が無視出来ない様な場所では、横波だけで議論が閉じない事は重々承知だと思う。クーロンの法則が縦波成分を有する事は当然知っているだろう。この事実だけで、Michelson-Morley

の実験を過大評価してはいけないという事が分かるだろう。但し、同じ光を異なる座標系で見ても横波しか見えないとすると、これは不思議な事である。

同じ論法は、以下の点でも使用できる。百歩譲って、光速の測定が非常に大切であるとしても、これは単なる電磁気現象である。電磁気現象をいくら究めても、電磁気現象とは独立な力学現象に付いてまでどうこうと言うことは、あまりにもやりすぎという誹りを受けるだろう。

Michelson-Morley の実験を過大評価している人達は、特殊相対性の何たるかがはっきりと理解できていないのではないかと思う。本当に分かっているならば、特殊相対性の説明にこそ多くのページを割かねばならないだろう。

最後に、歴史的な事実を一つ付け加えよう。Einstein が、光速不変を要求したのは、１９０５年だろう。これが特殊相対論が発表された年である。この光速不変が撤回されたのは、一般相対論が発表された１９１５年だとするのが妥当だろう。そして、Eddington が光の湾曲を観測したのは１９１９年である。光の湾曲は、光速は、解釈は何とあれ、場所の関数であるという事実を示している。即ち、光速不変は人類の歴史の中で、１０年から１５年しか意味を持たなかった概念である。

光速不変

上で、悪口を言ってすぐにそれを指導原理だと言うのはおかしいかな？

(1) から (5) 迄の基本法則を認め、更に特殊相対性を要求するならば、物理法則を、特殊相対性を満足するように書き換える必要がある。

物理法則を書き換える指導原理として、力学の方程式を出発点とするか、電磁気学の方程式を出発点とするかが次の問題となる。先に力学の方程式は、まだ完成していないという気がすると述べた。この力学の方程式は保存則だけで、dymanics を記述していない。

一方、電磁気学の方程式 (2) と (3) は、dynamics をも記述している様に見える。だから、電磁気学の方程式は特殊相対性を満足するべきであるという要請を置いて、電磁気学の方程式が不変となるような 4 次元空間での回転 (線形変換) を考える事になる。ここまで来ると、この線形変換は既に Lorentz が書き下している。Lorentz 変換が 4 次元空間での回転を記述するとし、回転の前後での座標系で、この電磁気学の方程式が同等に成立するためには、

真空の電磁気的性質が座標系に依存しない

という事を付帯的な要請として付け加える必要がある。

ここで更に付け加える事がある。ある種の単位系では、方程式 (2)、(3) は以下の様に書き換えられる。

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 i^\nu$$

ここで、μ_0 は真空の透磁率であり、４πの様な空間構造のみに依存する無次元の数ではなく、単位系に依存する次元を有する。この真空の透磁率は Lorentz 変換により不変な定数であるという議論をしている教科書をあまり見掛けない。

真空の電磁気的パラメータは 3 個ある。これらは、誘電率、透磁率、及び光速でありこのうちの 2 個が独立であり、残りの一つは従属である。従って、(慣性系で) 真空の電磁的性質

が不変であることを要求しないと Maxwell の方程式が Lorentz 変換に対して不変にならない。この点も、多くの教科書で記述があいまいであると思う。
真空の電磁的性質が Lorentz 変換で変化しない事と、真空が分散性を持たない事とがつながっていると思う。個人的には、分散性を持たないという事は非常に不思議な事である。真空は分散性が無い、構造を持たないのっぺらぼうだ、から座標変換を行っても特徴が全然出て来ない。このようなのっぺらぼうの例は、例えばクーロン散乱の微分断面積を古典力学で計算しても量子力学で計算しても同じ結論になるというところにも顔を出している。

ここまでの締めくくりとして言うと、特殊相対論は物理法則を対象としてそこに法則性を見出そうとする取り組みである。これまでの自然科学が対象としていた自然現象が対象でない事を、強く認識しておかないと論理的な迷路に迷い込みかねない。