軌道角運動量の固有関数 $Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{r}})$ と固有スピン波動関数 $\phi_{s,\sigma}$ の積から、スピン・軌道波動関数 $|(\ell,s)j,m>$ を次式により定義する。

$$|(\ell,s)j,m>=\sum_{(m_\ell+m_s)=m} <\ell\, m_\ell, s\, m_s|j\, m> Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{r}})\,\phi_{s,\sigma}$$

次の演算子の行列要素を計算せよ。

1) $\vec{\ell}\cdot\mathbf{s}$

2) ベクトル演算子 $\mathbf{x}$ とスピン演算子 $\mathbf{s}$ でそれぞれ 2 階のテンソルを作り、そのテンソルのスカラー積を以下の様に書く。

$$T_x=([\mathbf{x}\times\mathbf{x}]^2\cdot[\mathbf{s}\times\mathbf{s}]^2)$$

$\mathbf{x}$ として、$\vec{\ell}$、$\mathbf{s}$、$-i\nabla$ が $T_\ell,\ T_r,\ T_p$ という記号で文献に登場する。これらの行列要素を計算せよ。

参考の為に、テンソル力の行列要素の結果だけ書いておこう。

対角要素

テンソル力	$j=\ell+1$	$j=\ell$	$j=\ell-1$
T_ℓ	$\ell(2\ell-1)/6$	$-(2\ell-1)(2\ell+3)/6$	$(\ell+1)(2\ell+3)/6$
T_r	$-\dfrac{\ell}{3(2\ell+3)}$	$\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{\ell+1}{3(2\ell-1)}$
T_p	$\dfrac{\ell}{3(2\ell+3)}\nabla^2$	$-\dfrac{1}{3}\nabla^2$	$\dfrac{\ell+1}{3(2\ell-1)}\nabla^2$

ここで、

$$\nabla^2=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

0 でない非対角要素は、以下の通りである。

$$<(\ell=j-1,s)j|T_r|(\ell=j+1,s)j>$$

$$=<(\ell=j+1,s)j|T_r|(\ell=j-1,s)j> \ =\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}$$

$$<(\ell=j-1,s)j|T_p|(\ell=j+1,s)j>=-\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2j+3}{r}\frac{d}{dr}+\frac{j(j+2)}{r^2}\right\}$$

$$<(\ell=j+1,s)j|T_p|(\ell=j-1,s)j>=-\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{2j-1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{(j-1)(j+1)}{r^2}\right\}$$

テンソル力演算子は、スカラーだから、j の磁気量子数 m には依存しないから、省略した。