原子核物理学の反応関係の実験手段

機械、材料技術

電気、 発・送電　この上の二つの項目に付いて述べる事はしないが、これらの概念に代表される infrastructure の上に現代科学は築かれている事を明示し、感謝する為に挙げておいた。

一つ面白い例を挙げておこう。KEK は研究者の予算要求額が 1 / 4 に押えられて出発し、8 GeV の陽子加速器を作る事として設立された。実際に完成した加速器は、１２ GeV の陽子を加速出来た。どこにこの魔法の源が潜んでいたか理解出来るだろうか？

真空技術　以下の記述を読めば、真空技術が必要である事はうなずけるだろう。

日本の真空技術には、東大で加速器開発を目指していたグループの存在は無視出来ないだろう。

イオン化　原子と電子や他の原子等との衝突断面積を考慮して、必要な真空度が決定される。

正イオン

原子のイオン化断面積は約 $10^{-16}cm^2$、一方原子核反応の断面積は大きい方で $10^{-24}cm^2$。 8 桁以上の相違があるから、原子核関係の現象に、原子物理 (日常生活) での経験則を援用した判断は妥当ではない。

１ S 状態のイオン化に必要なエネルギーは水素で約１５ eV, ウランだと約１００ keV。電子がイオン又は原子に衝突する事に依りイオン化が実現すると仮定すると、この数値の意味するところは、電子は衝突以前に、この数値にまで運動エネルギーを高められていなければいけないという事である。これよりも低い運動エネルギーの電子とイオンが衝突すると、イオン化でなく電子捕獲の方が起こりやすいと想像される。各種のイオン化エネルギーに対し、どの程度の大きさの電位差が、平均自由行程の間に実現されなければならないかを考えてみよ。

エネルギーの高い電磁波を原子に吸収させると、主に電磁波の電気ベクトルと電子が相互作用し、電子は原子核からの束縛を離れて自由電子となる (光電効果)。これは、原子のイオン化である。

もしも、上に述べた手段で作られたイオンから更に電子を叩き出す事が出来るならば、多価イオンを作る事も可能である。多価イオンを作る時には近くの中性原子と衝突しないようにして、イオン化の過程だけを選択的に進行させる (真空が高い) 必要がある。

原子核の周りを周回している電子の速度よりも早い速度のイオンが物質中を通過すると、低速の束縛電子は剥ぎ取られてしまうだろう。多価イオンを作る一つの方法は、高速に加速したイオンを薄膜に打ち込む事である。膜が薄いと、イオンのエネルギーはほとんど失わないのに、電子は剥ぎ取られるからである。

現在では９２荷のウランが実現され、QED のテストや原子核の大きさ (電荷分布

半径) の決定にも利用されている。

負イオン

電子を中性原子に付与する。電子の束縛エネルギーを考慮する必要がある。エネルギー的に許されるならば、電子密度の濃い空間に原子を低速で打ち込めば良いだろう。別の工夫として、第 1 イオン化ポテンシャルの小さな (Cs) 原子との電荷交換反応を利用している。この時には、原子の電子の速度とイオンの速度が電子交換の確率 (断面積) を決定する要因になっている。共鳴的に断面積が変化する事象を選ぶと、選択的イオン化が可能である。

2 荷の負イオンが実現出来るかどうかは知らない。例えば $(1S)^1(2S)^2$ という電子状態の水素イオンは存在するのだろうか？ 存在するならば、イオンの寿命はどれくらいだろう？

タンデム型の静電加速器には無くてはならない技術要素である。エネルギーの高い加速器のビーム引きだし技術としても、時々検討される。この場合は、septum 電極の放射化、deflector や kick magnet の技術的困難の回避等が目的である。

残留ガスとの衝突による電子損失や、束縛エネルギーとローレンツ力との兼ね合いが問題となる。

偏極イオン

原子核を偏極させる事はかなり困難だが、特定の向きに偏極した原子核だけを選択的に取り出す事は、現在では、そう困難ではない。但し、原子核に依存する。

偏極原子 (原子に束縛された電子が偏極している) と原子核との超微細相互作用を利用する場合もある。

原子現象では電子のスピンに依存した相互作用は、クーロン力に比して小さい (微細構造の原因)。他方、原子核現象では、スピン依存力は中心力と較べて無視出来ない大きさである。この意味で、スピン偏極という自由度の研究は大切である。

加速器

中性子物理では必ずしも必要とはされなかったが、ミクロな世界の研究には必須の技術要素である。現在では、原子や分子の物理にも必要不可欠な研究手段と考えられている。中性子源としては、原子炉を利用する時代が長く続いた。現在では、原子炉では得られないエネルギーの中性子に対する要求も発生している。

核物理研究の初期には、クーロン斥力に打ち勝つ為、後にはプローブ粒子のドブロイ波長と研究対象との大きさ比較の為に加速器が必要とされる。

核力 (強い相互作用) を利用した加速器は実用化の段階には無いと考えて良いだろう。

中性子源の一部には、この例外もあると言えるが

加速原理として、電磁的相互作用を利用したものしか存在しないと極論して良いだろう。

形態による分け方をすると

直線加速器

歴史的な意味で、Cockcroft-Walton, van de Graaff, Linac, RFQ といったところか

RFQ の発明以後は進歩が無い。

円形加速器

Cyclotron, Betatron, Syncrotron 等。 AGS で進歩が無くなった。AGS を挙げるならば、Thomas Cyclotorn を優先して挙げるべきだという意見はあるだろう。

ZGS や AGS で実現された強収束と言う概念は１９５０年代に提案され、RFQ は１９７０年代の概念である。AGS の１変形として、FFAG を追加しておいても良いだろう。直線加速器と円形加速器の折衷案的な加速器として、Microtron がある。

次世代の粒子加速の物理が望まれる。例えばプラズマやレーザー加速というアイデアは提案倒れとなっている。

加速原理からの分類

DC 加速器

Cockcroft-Walton, van de Graaff 程度かな。

電気的なエネルギーを局所的に詰め込む事は、原理的な制限は無いに等しい。しかし電気的な意味での絶縁特性が計算不可能だから、技術的には挑戦困難になっている。人類が実現した最高の直流電圧は３０ MV 程度である。実用的な加速器の技術限界は、１ MV/m 程度であろう。

DC 加速器では、加速されたイオン (ビーム) 強度は時間的に変動する事はない。時間構造の無いビームが得られる。

RF 加速器

高周波技術に支えられた加速器という意味であるが、本当に加速に利用されているのは、クーロン力である場合がほとんどであるという意味では、DC 加速器と加速原理は同じである。

電子線形加速器が、本当の意味での高周波加速器と呼べるだろう。

RF 加速器では、変化する電場を利用する訳だが、加速位相にある時間帯だけを利用するから、ビームはどうしても時間構造を持つ。即ち、ある時間だけ出て来て残りの時間帯には何も出て来ない。例えば、１０ MHz で加速すると、繰り返し周期は １００ ns (１０^{-7} 秒) であり、この内の 数 ns だけビームが加速されて出て来る。従って、瞬間電流は非常に大きくなる可能性がある。

線形加速器 (Linac) は、電場の加速位相では、電極間に被加速粒子を置き、減速位相では静電遮蔽された場所に被加速粒子を置く様な設計になっている。Drift Tube Linac (DTL) と呼ばれる事もある。この種の加速器には、経済的な制限がもっともきつい。逆に言えば、お金さえかければ大きな (長い) ものを作り得る。

線形加速器の加速原理に関するアイデアはサイクロトロンでも同じである。(1) 線形加速器の加速管が長くなりすぎるのを避ける、(2) 加速電源の重複利用を実現するために、サイクロトロン運動の等時性を利用している。非相対論的な極限での一様磁場に垂直な面内でのイオンの周回運動の周波数 (サイクロトロン周波数) は、$\omega = \frac{q\,B}{m}$ で決定される。直観的に言えば、エネルギーの高いイオンは大きな軌道半径の円を描き、小さなエネルギーのイオンは小さな半径の円軌道を描く。結果的に一周する周期 (角速度) はエネルギーに依らず一定となる。
相対論的には、この式の分母に $\sqrt{1-(v/c)^2}$ が登場する為に、加速の等時性が崩れる。即ち、サイクロトロンの内側を走るイオンに対しては加速位相にある高周波電場は、外側領域ではローレンツ因子だけ速度が遅れる為に、減速位相になってしまう。このような等時性の仮定が破れるエネルギーがサイクロトロンでは存在し、この制限が原理的な上限を決める。陽子では２０ MeV 程度が上限である。
この困難を乗り越える為に、連続的な加速を諦める事にし、エネルギーが上がると加速 RF の周波数を少しずつ下げて行くという方法を採用した。 synchro-cyclotron と言う名前で呼ばれる。
もう一つの制限は原理的なものでは無く、ビーム強度の低下と電磁石の大きさを制限するという実用的なものである。
電磁石の大きさと言う制限は、エネルギーに依らずいつでも同一の軌道を描く様にすれば克服可能である。このためには、エネルギーに応じて、磁場の強さを調節する必要がある。
イオンを加速するとは、進行方向の速度を増やすという事である。その時、進行方向に垂直な速度成分はどうなっているかに注目してみよう。当然の事ながら、垂直成分が 0 という確率は 0 であり、有限の大きさを持つはずである。このイオンが長時間運動していれば、この垂直成分の故に軌道は理想的な場合からずれて来る。即ちビーム強度が減少する。この対策としては、理想軌道からずれた粒子に対して復元力を作用させる必要がある。
磁場がイオンの理想軌道面に垂直ならば復元力は期待できないが、理想軌道からはずれた速度成分に垂直な磁場があると、復元力を発生できる。サイクロトロンでは、軌道半径が大きくなるほど平均磁場を弱めれば良い。最初にこれに気付いたのは、Livingstone であり、更に一般化して加速器に応用する事を提案したのが Thomas である。即ち、磁力線を平均軌道に対して傾けると、発散力や収束力が発生するが、この発散力と収束力を旨く組み合わせて、平均的には収束力を発生する事が可能である事になる。例えば、凸レンズと凹レンズを旨く組み合わせると、全体のレンズ系としては収束力を持たせる事が可能である事は良く知られている。少し詳しく述べてみよう。磁場の指数として、

$$n \equiv -\frac{B}{R}\frac{\partial B}{\partial R}$$

を定義すると、サイクロトロン中の軌道運動では軌道面内では、中心軌道からのずれに対し、$\sin\sqrt{n}\omega t$ という因子が、中心軌道面に垂直な軌道に対しては $\sin\sqrt{1-n}\omega t$ の因子が登場する。従って、どちらの面内の運動も同時に収束的である。
ここで磁場指数 n を１０００以上とすると、運動方程式の解に指数関数が登場し、収束力も発散力も非常に大きくなる。ビームの平均進行方向に垂直な二つの面での運動に対して収束力と発散力を交互に (Altenate) に発生させ、全体として収束力を得る。磁場の Gradient を利用した Syncrotron という意味で、AGS と略称される。現在稼働中の円形加速器は全て AGS であると言って良いだろう。
別の言葉で収束性を表現するならば、中心軌道の周りで出来るだけ何回も振動させれば、実際のイオンは中心軌道にまとわりついて、遠くへ行って真空容器の壁にぶつかる確率は減るという事である。

線形加速器でも、進行方向の速度に起因するビーム強度低下と言う事情は同じであるから、ビームを収束するという機構はどこかに組み込む必要がある。

さて、軌道がうねるという事はビーム軌道長が分布を持つという事であり、等時性を崩す要因となる。ところが崩れた等時性が自律的に回復する機構が、RF 加速器には組み込める。加速中の個別のイオンの運動エネルギーと軌道長には一定の関係がある。二つの場合を想定しよう。
１) エネルギーの高いイオンの軌道長は、エネルギーの低いイオンの軌道長よりも長い。例えば、サイクロトロンやエネルギーの低い (KEK の PS では約 3 GeV 以下) 状態の AGS が該当する。
加速電圧が最高の時点に加速間隙を通過するという条件をあきらめ、エネルギーが高いイオンは加速電圧が小さい時刻に、エネルギーが低いイオンは加速電圧が大きい時刻に加速間隙を通過させる。
２) 上とは逆の場合。エネルギーの高い AGS や 線形加速器の場合。エネルギーが高いと、直進性が増すので、近道をする傾向が強い。
位相を１) の場合の逆にして考えれば良い。このような加速電場の利用を、位相安定性と呼んでいる。RF 電場と加速の瞬間を調整することで実現する。
現在のシンクロトロンや電子以外の線形加速器は、位相安定性を利用している。即ち、加速電源の位相の最大値を利用していない。この意味で、非常に効率の悪い加速器となっている。この効率改善に加速器屋が挑戦しているという話は聴いていない。
電子線形加速器に付いては一言追加する必要がある。先ず、電子を加 '速' する事はほとんど無意味である。例えば１０ MeV の電子にはほとんど加速の余地が残されていない！嘘だと思ったらば、この電子の速度を計算し、光速と比較すれば良

い。速度と言うのは、日常的な意味では便利な概念であるが、相対論的にはあまり意味のある概念では無い。速度ベクトルは、４元ベクトルの３個の成分ではないという意味で非相対論的概念である。電子加速器は電子を加速しているのではなく、電子の運動量や運動エネルギーを増やしているのである。さて、電子は非常に速く真空中を動くので、電子に先回りして加速電場を準備する事は非常に困難である。そこで、進行波を用いて加速する。即ち原理的な電子加速器は０次のベッセル関数で”加速”されている。

電子加速器では、結果として高エネルギーの電子を利用できる。電子が直接 (仮想光子を媒介として) 原子核と反応する現象を観測する。光子 (γ 線) 発生器というもう一つの電子線利用法もある。高エネルギー電子を原子番号の大きな物質に照射して、制動輻射を利用する場合と、レーザー等の強力光源からの光子と電子の散乱 (コンプトン散乱) を利用する場合である。後者は通常 逆コンプトン散乱と呼ばれる。直線偏光だけでなく円偏光を実現する事も可能である。

AC 加速器

変な分類であると思うだろう。ここには、betatron のみが入る。過去にはあったようだが、現代のシンクロトロンは $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ では加速されていないだろう。この分類項目を設けた理由は、$\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ を実現する為に、AC を用いている場合が多いという事情による。

betatron で特筆さるべき事は、Serber と Kerst の軌道安定性の議論、キーワードで言えば 安定軌道とベータトロン振動であろう。これらの概念は、その後拡張され、全ての加速器理論の根底に包含されている。betatron の安定軌道上の磁場は、軌道半径が囲む円内の平均磁場の半分でなければならないと言う事は電磁気学の演習問題として頻繁に登場する。

加速器関係の知人から聴いた話では、ある種のサイクロトロンでもシンクロトロン振動を問題としなければならない様である。

加速器は減速器としても利用できる。

イオン光学

この概念を知っている学生は少ないだろう。工学の分野では、電子光学と呼んでいる場合もある。

理想的な電磁場分布を実現し、この電磁場中をイオンがどのように運動するかという事が基本的な問題である。実用的には、加速以外に収束という事がある。上には運動方向に垂直な力を作用させると書いた部分である。

収束と言う概念は、収束させる対象として、方向・速度・運動量・質量・エネルギー・時間 等が考えられている。又、近軸光線に対する概念としては１次収束・２次収束といった概念もある。更には、複数の対象概念を同時に収束させるという意味での多重収束も考えられる。

この様なキーワードを並べると、かなり奥が深い事が理解されるだろう。
加速器の逆利用として減速器という利用法もあり、この時には、各種の収束と言うのは非常に大切な概念となる。
歴史的には、質量分析器の設計という側面と、ベータトロン振動の様な加速器からの要求と言う側面がある。
３次元的な電磁場の計算が、計算機上で自由に出来る様になったのはつい最近の事であるから、更なる発展を期待したいところであるが、この方面への挑戦は２０年前にはかなり行われたが、現在ではあまり聞こえてこない。
日本語で書かれたイオン光学の適当な教科書は無い。僕のホームページの講義ノートでも参考にしてもらいたい。
質量分析
イオン光学の初期の発展に、質量分析器の開発が果たした役割は非常に大きい。$E = m\,c^2$ という関係式が成立する事を確認したり、原子核の同位体や同重体を発見したのは、この質量分析分野の研究者である。
原子質量単位という概念がある。最初は ^{16}O を基準にしていたが、現在では ^{12}C 原子核を持つ中性原子の質量が基準となっている。この理由は、炭素の方が $(C_n\,H_m)$ 各種の質量基準となるイオンの組合せが豊富に、かつ簡単に利用できるという質量分析上の要請からである。
放射線検出
荷電粒子による検出器物質のイオン化とこれに伴う、放電現象や電気伝導度の変化を検出する。Geiger 検出器、比例係数管、半導体検出器等。
短寿命の励起状態の脱励起に伴う、発光現象を利用するものとしては、scintillation counter がある。
チェレンコフ輻射を利用する場合もある。
写真乾板や TLD(thermo luminescent dosemeter)、ESR 法では、長寿命の励起状態の生成を利用する。
中性子の検出には、原子核との相互作用を利用しなければならない。例えば、弾性散乱された原子核の発生するイオン等を利用する場合があり、この場合には主に発光が利用されるので、scintillation counter と同じ検出機構となる。別の場合としては、非常に断面積の大きな原子核反応を利用する事もあり得る。反応の結果放出されるα 粒子を、荷電粒子として検出する様な場合である。
検出効率も念頭に置いておかねばならない場合がある。
荷電粒子の検出率は、多くの場合１００％と考えておいて良いが、γ 線や中性子の検出率を高精度で決定する事は非常に難しい。検出器内部で起こる全ての反応の微分断面積を精度良く知る事が難しいからである。入射中性子やγ 線のエネルギーを精度良く知る事も、実際上は非常に難しい。多くの人は、１０ MeV 以上の中性子検出器の中で、 ^{12}C が３個のα 粒子に壊れるとは思ってもみないだろう。

詳しい説明は、学生実験のテキストを参照の事。

データ処理

このタイトルを書くとすぐにコンピュータと条件反射をしてはいけない！

放射線検出器からの信号を電気信号に変換する部分、主に前置増幅器と呼ばれる、の性能が全体の死命を決定する。前置増幅器の電源も裏方として大切である。

放射線計数以外の機能を要求するならば、要求動作に対する出力の周波数依存性の様な部分にも頭を使う必要がある。例えば、周波数フィルター機能をこの部分に持たせる事である。勿論、インピーダンス変換は非常に重要な機能である。

総じて、アナログ信号の取扱は、非常に重要である。

この次の段階として、アナログ信号のディジタル信号への変換が待っている。ADC (analog to digital converter) は、変換精度以外に変換所要時間も大切な項目である。

ディジタル (論理) 信号は、計数・時間差等の物理量として使用される場合がある。

例えば宇宙線が本当に地球外から来る事を証明する為に、放射線検出器を気球に載せた人がいる。一方、二つの検出器を上下にくっつけて置いた時と、水平にくっつけて置いた時の、同時計数率を比較した人もいた。電子回路の知識があるならば、後者の方が再現実験がやり易いという意味で頭の良いやり方だと言えよう。

検出器の数が増えると、検出器間の相関を問題にする場合がある。こうなると、計算機の出番である。計算機無しに、各種のデータの相関を正しく評価するのは困難だろう。

どんな物理量を測定し、何が結論されるのか？

弾性散乱の微分断面積

入射粒子のエネルギー損失が無視出来る程度の厚さの標的を用いて、入射粒子が標的核により弾性散乱される確率を、散乱角の関数として測定する。この散乱確率の角度依存性は微分断面積や位相のずれで表現する。

この散乱過程には、入射粒子の de Broglie 波長と、散乱体の大きさという二つの長さが関与している。両者の相対的な関係に依り微分断面積の散乱角依存性が変化する事は想像に難くない。これにより、入射粒子と標的原子核との平均的な相互作用の強さや、原子核の大きさが分かる。(実際に分かるのは相互作用半径やその多重極モーメント、又は等価ポテンシャルだろう。)

全反応断面積

入射粒子の数と透過粒子の数の比は、入射粒子が標的核に吸収される確率を与える。この量も、原子核の大きさや相互作用の強さを与える。

非弾性散乱

エネルギースペクトルから原子核の励起状態の存在が分かる。

非弾性散乱の微分断面積は、入射粒子が標的核に与えた軌道角運動量に非常に敏感であるから、励起状態が持つ角運動量やパリティーの決定に非常に有効な手段である。

遷移行列要素 $<$ 終状態 | 相互作用 | 始状態 $>$ を推定できる事はすぐに了解出来るだろう。この行列要素は、入射粒子と標的原子核の個性を反映したものになる。角度に共役な物理変数は (軌道) 角運動量である事を思いだそう。更に、軌道角運動量を l とすると、系のパリティーへ $(-)^l$ の寄与がある事も知っているだろう。
原子核の励起状態からは、γ 線が複数放出される場合がある。非弾性散乱された粒子とγ 線を同時に検出出来るならば、更に詳しい原子核の情報を入手出来る。散乱粒子とγ 線の放出角度や時間遅れ等も観測の対象となる。散乱粒子とγ 線の放出方向との関係 (角度相関) を問題とする場合もある。
更に、励起状態にある原子核が外部の電磁場とどのように相互作用するかを研究している人もいる。
この文で、γ 線をβ 線に置き換えても考えてみてはどうだろうか？β 崩壊の寿命はγ 崩壊の寿命よりもかなり長いので、意味のある実験もあるし、実際上、実験できないものもある。
一方、非弾性散乱放出粒子をβ 崩壊に伴う電子と読み変えると、多くの実験が可能である。
β 崩壊により放出される電子の運動エネルギースペクトルの測定から中性微子の存在が推定された事を知っている人は多いだろう。
組替え反応の微分断面積の測定
入射粒子の一部が標的核に捕まえられる又は逆に標的核から粒子を取って来る反応は、組替え反応と呼ばれる。極端な場合には、入射粒子全体が標的核と融合しても良い。これ等の反応により、天然には存在しない原子核を作る事が可能となる。
1 核子移行反応ならば、原子核内で核子がどのような量子数を有する状態が実際に許されるのかという情報を与え、 2 核子移行反応ならば核内での 2 粒子相関の程度に依り、微分断面積が大きく変化する事は簡単に想像されるだろう。
これらの反応の微分断面積は、原子核内での相互作用や原子核のモデルを作る上で非常に大切な役割をしている事は想像出来るだろう。
現在の流れの中では、元素がどのように作られたかを系統的に調べる仕事が、精力的になされている。
又、太陽からの中性微子が検出されているが、その強度は太陽内での元素合成 (原子核反応と同じ意味である) 反応の種類とその反応頻度を反映している。例えば、^{7}Li による陽子の吸収断面積の正確な値が要求されているが、 5 %の要求精度に答えるのは厳しいというのが現状である。
偏極量の測定
核子はスピンを持ち、核力はこのスピンに強く依存している。
抽象的に言うならば、散乱現象に関与する ‘方向’ は、入射粒子の進行方向と入射粒子 (及び標的核) のスピンの方向という複数の ‘方向’ が登場する。即ち、微分断面積が散乱時の極角だけでなく方位角にも依存する。例えば陽子のスピンが、進行方向に対し

て垂直である時、右と左 (当然同じ散乱角であるとして) へ散乱される確率は有意に異なる。極端な場合には 1 対９９程度にまで変化する。
このような情報からは、軌道角運動量に対して、核子の固有スピンが (核内での軌道運動の角運動量に対して) どちらを向いているかという情報が直接得られる。
入射粒子のスピンだけでなく、散乱後の粒子のスピンの向きを問題にする事もできるし、一般的には入射・散乱粒子のスピンの間の相関を考える事も必要になる。

核物理に登場する単位や数値
以下の様な単位や数値がよく使用される。Reviews of Modern Physics**77**(2005)1 を参照。

重さ　質量としては、陽子と中性子の質量に光速の 2 乗をかけてエネルギーに換算した値は２００２年の CODATA によると、

$$m_p\,c^2 = 938.272029(80)\,MeV \quad m_n\,c^2 = 939.565360(81)\,MeV$$

中性子の方が約１．３ MeV だけ重いので, 中性子は約９００秒の平均寿命 (半減期ならばこれに $\ln 2$ を掛けるから約１０分) でβ 崩壊する。
電子ならば、$m_e c^2 = 0.510998918(44)\,MeV$ であり、核子に比して約１/１８４０の因子だけ軽い。
常識的な SI で表現すると、$m_p = 1.67262171(29) \times 10^{-27}\,kg, \quad m_n = 1.674927278(29) \times 10^{-27}\,kg$ という事になる。ミクロな世界での質量単位としては、^{12}C の中性原子を統一原子質量単位 (u 又は Da) として使用する。Da は Dalton を記念している。^{12}C 核の束縛エネルギーを考慮しなければいけないので、陽子や中性子の質量は、この原子質量単位では 1 よりも０．８％重い。この原子質量単位で測定した原子核の質量を自然数で近似したものが、質量数になっている。

長さ　陽子のコンプトン波長は、

$$\lambda_{cp} = \frac{h}{m_p\,c} = 1.3214098555(88) \times 10^{-15} m$$

である。両辺を $2\,\pi$ で割った値で表現する場合の方が多い (？)。桁表現の部分、$10^{-15}\,m = fm(femtometer)$ と表現する。E. Fermi に因んで fermi と呼ばれる事も多い。
古典電子半径は、$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0\,m_e\,c^2 = 2.817940325(28) \times 10^{-15} m$ であり、これは電子質量を電磁的エネルギーだと仮定した時の、大きさの程度を与える。
代表的な原子核の半径は、観測量や定義に依存するが、O(1) fm であり、質量数 A が 1 から２３０程度増えても５ ~ ６倍程度にしか増えない。
原子の大きさが、原子番号 Z が増えてもほとんど変化しないのと良く似ている。
原子核から放射されるγ 線のエネルギーはほぼ 1 MeV 程度のエネルギーを持っている。このγ 線の波長は $\lambda = 2\pi\,\hbar\,c/E_\gamma = 1240\,fm$ とすると、原子核の大きさよりも非

常に大きい。こんな大きな波長の波が原子核から出て来る確率は非常に小さい (寿命が長い) に違いない。

一方、運動エネルギーが 1 MeV の陽子の de Broglie 波長は $\lambda/2\,\pi = \hbar/p = 4.6 fm$ であり、ほぼ原子核の半径程度である。

時間　秒を単位とするが、１０ fm の直径の原子核を光子が通過するのに必要な時間は、3×10^{-23} 秒である。原子核現象が生起する時間の目安はこの程度であろう。

上に引用したγ 線の波長から分かるように、電磁遷移の寿命はこれよりもかなり長い。^{60}Co がβ 崩壊した後、 ^{60}Ni の第１励起状態はγ 線を放出する。この場合の寿命は 7.3×10^{-13} 秒と測定されている。ここに引用したβ 崩壊だと、半減期は ５．３年である。

α 崩壊は強い相互作用で起こるから、その寿命は非常に短いと予想したいところだが、クーロン障壁の透過確率が極端に小さいために、現実的なα 放射線源の半減期はかなり長く、^{210}Po では１３８日の半減期である。この原子核の半径を $1.25\times210^{1/3} = 7.4\,fm$ とすると、この半径でのα 粒子と ^{206}Pb 核のクーロン斥力エネルギーは、31.8 MeV と計算される。

エネルギー　これまでに、いくらかの数値が登場したが、励起エネルギーの記述には、$10^6\,eV = 1\,MeV$ という単位が使用される場合が多い。

原子核のデータが必要になった場合には、以下の文献を探ってみよう。

1　理科年表。
2　Table of Isotopes
3　Atomic Data and Nuclear Data tables

中性子関係では原研、他の核反応のデータでは北海道大学のデータベースもあたってみよう。

原子核現象に関係する保存則

原子核を一つ真空中に置いたとし、この原子核を特定し、その個性を表現するパラメータとして思い付くものを列挙してみよう。空間構造に関係するものを先ず挙げよう。

１) ３次元空間の並進対称性に起因するのが、運動量の保存則である。原子核を止めて観察する時には、この対称性からは何もパラメータは得られない。強いて挙げるとすると、加速する時の慣性質量であろう。

２) 時間の並進対称性からは、エネルギーの保存則が登場する。ここで言うエネルギーという概念は、静止質量を含まないから、励起エネルギーが対応する。

３) ３次元空間の回転対称性からは、軌道角運動量の保存則が登場する。しかし４次元空間全体を考慮していないため、この保存則は限定的である。

４) ４次元 (時間と３次元空間) 空間を考慮した時には、４元ベクトルとしてのエネルギーと運動量の保存則が成立する。

５）４次元空間での回転を考慮すると、いわゆる固有スピンという概念が登場する。固有スピンと軌道角運動量のベクトル和が全体として保存する。
６）空間の性質として、鏡映変換に対する対称性を仮定するとパリティー保存という概念が登場する。パリティーが保存するかどうかという事は、しかしながら、現象が生起する舞台だけでは議論する事が出来ない。舞台だけではパリティー保存しても、その舞台で演劇を行う役者がパリティーを保存しなければ、現象全体としてはパリティーは保存しない。即ち、現象の原因となっている相互作用がパリティーを保存するか保存しないかという事も大切な要素である。原子核現象に対しては、弱い相互作用 (β 崩壊に関係している) はパリティーを保存しないという事が分かっている。他の原子核現象でパリティーが混じる程度は非常に小さいと考えられている。
７）電荷は保存すると考えられている。電荷保存則は反例が見付かっていないと言う意味で、非常に厳密に成立している様である。電荷が保存すると、電磁気現象を記述する方程式がゲージ不変という性質を持つ事になる。
８）以下の様な反応は起こらないと考えられている。水素原子を構成する陽子と電子が合体して、二つの光子になる。重陽子を構成している陽子と中性子が合体して、正電荷のπ 中間子と中性π 中間子になる。この様な反応は、電荷の保存則ともエネルギーや運動量、角運動量の保存則とも矛盾しない。
水素原子の場合を取り上げて確認してみよう。エネルギーから始めよう。陽子と電子の静止質量は、約９３８．２７２ MeV と０．５１１ MeV であるから, 約 ９３９/２ MeV の光子が逆方向に出るならば, 最初には静止していたとして, 運動量的にも矛盾は無い。
陽子と電子はどちらもスピンが１/２ $(\hbar)$ である事が知られている。初期状態として、両者の相対運動の軌道角運動量が０ (例えば 水素原子の基底状態) にあったとする。この時全系の角運動量は、１/２ + １/２ = ０又は１となる。終状態の二つの光子は、それぞれ最低でも角運動量を１単位持っているので、全系の角運動量を保存する様な状態を作る事は可能である。
この様に考えると、ここで引用した反応を禁止するような量子数を考え出して、その量子数が保存するから、これらの反応は禁止されるのだと考える事にする。これらの量子数には、重粒子数、軽粒子数、奇妙さ等が考えられている。
９）陽子と中性子を比較し、これらは元来はエネルギー的に縮退していたが、電荷の有無に起因する (核力に比較して) 弱い電磁的相互作用で縮退が解けていると Pauli は考え、新しい量子数を アイソトピックスピンという名前を提唱した。過去の概念と照合すると、アイソバリックスピンと呼ばれるべき内容であったが、現在では簡単にアイソスピンと呼ばれる方が多い。
アイソスピンが保存する事を要求する事は、核力に対応する強い相互作用は電荷に依存しないと仮定する事と等価である。

原子核を記述するパラメータ
上で触れられた概念を用いて、個別の原子核を特徴付けるパラメータを考えよう。

原子番号　これは原子核の有する電荷を陽子の電荷で割った値であり、Z という記号を用いる。
電荷の保存則に基ずいている事は明らかだろう。

質量数　重粒子数の保存から、陽子数と中性子の和を質量数 と呼び記号 A を使う。
二つ目の独立量として、中性子数 $\mathrm{N}(=\mathrm{A}-\mathrm{Z})$ を用いても良い。
これらの事実から、(基底状態の) 原子核を元素記号 (X) とその左肩に質量数を書いて ${}^{A}X$ と表す。必要ならば、Z や N を元素記号の下付き文字として、${}^{A}{}_{Z}X_{N}$ の様に書く場合もある。
電荷の保存則、エネルギーの保存則と原子核の束縛エネルギーが質量エネルギーよりも充分に小さい事が背後にある。

スピン　原子核の有する角運動量をスピンと呼び 記号 J、I 等で表す。
核力は中心力以外にスピンに依存する部分を有する。そのために、軌道角運動量だけでは良い量子数ではない。原子核に軌道角運動量を与えても、スピン依存力 (例えばテンソル力) の為にすぐに固有スピンと軌道角運動量が混じりあってしまう。従って、原子物理の世界で言われるスピン (電子の固有スピン) と原子核の業界で呼ばれるスピンとは同一ではない可能性がある。
原子 (を構成する全ての電子) の有する角運動量を $\mathbf{J}$、 原子核の有する角運動量を $\mathbf{I}$ 、両者をベクトル的に合成した角運動量を $\mathbf{F}$ $(=\mathbf{I}+\mathbf{J})$ と書く習慣がある。

パリティー　鏡映変換に対する波動関数の対称性である。これも、断定的に決定できる概念ではなく、陽子固有のパリティーを無理矢理に正であると決めつけて、自由度を殺している。

励起エネルギー　励起状態を記述するのに、全質量を指定するよりも少ない有効数字で規定できるからこちらの方が便利である。

　これらのパラメータ以外に、環境と原子核とが相互作用する事によりきまるパラメータがある。

崩壊形式と寿命　安定でない原子核は何らかの相互作用により状態が変化する。定義を逆に述べている様におもえる。
いわゆるα 崩壊やβ 崩壊等である。${}^{40}\mathrm{K}$ の様に β^{+} 崩壊と β^{-} 崩壊のどちらかでより安定な原子核に変化する場合もある。この１０年ほどの間に ${}^{14}C$ を放出する様な例も発見されている。α 崩壊やβ 崩壊した後で、複数のγ 線を放出する例は多い。この時には、分岐比という概念が登場する。実験３の講義ノートを参照すると良い。
不確定性原理を用いて、状態の有するエネルギーの幅 (Γ) で寿命を表現しても良いし、崩壊定数 (τ) や半減期 $(T_{1/2})$ を用いても良い。時刻 t での核種の存在量 $I(t)$ と時刻

t=0 での存在量 $I(0)$ との関係は以下の通りである。

$$I(t) = I(0)\exp(-t/\tau), \quad \Gamma = \hbar/\tau, \quad T_{1/2} = \ln 2 \times \tau$$

これらの寿命は、崩壊様式毎に区別される場合もあるし、まとめていくらという場合もある。

α 崩壊に伴い放出されるα 粒子の運動エネルギースペクトルは、複数の線スペクトルになる場合があり、この事実は原子核にも励起状態がある証拠となった。

時には、β 崩壊の後で中性子を放出する場合もあり、原子炉の制御には欠かす事の出来ない概念となっている。

電磁的多重極能率　原子核の大きさの広がりに於いて、電荷や磁気能率の分布が一様でないと、磁気双極子能率や、電気的 4 重極能率等を持つ場合がある。

これらの原子核の電磁的パラメータと外界との相互作用の内、物質内部での (主に磁場や電場勾配) 場との相互作用を超微細相互作用と呼び、原子核や物質の性質を探る研究分野を形成している。

運動学・実験室系と重心系

反応の記述：

標的 A に粒子 a が衝突して粒子 b が放出され、粒子 B が残るような反応を A(a,b)B と記す。この例の様に、始 (終) 状態で 2 個の粒子が関与している様な反応を 2 体反応と呼ぶ。今後は、この 2 体反応を主に取り扱う。粒子 b が出ていく方向の極角を散乱角と呼ぶ。入射粒子の進行方向を回転軸とする回転対称性を有するならば、方位角は特定する必要はない。2 体反応では、B と b の内部エネルギーを特定し、b の散乱角をあたえると、運動エネルギーは計算可能である。従って、a の運動エネルギーと、b の散乱角を固定すると、B や b の励起エネルギーに対応する線スペクトルが得られる。しかし、終状態が 3 体以上の粒子で構成されているならば、これらのパラメータを指定しても連続的なエネルギースペクトルとなる。

問。 終状態が 3 体となる場合、終状態を特定するために必要なパラメータの数を数えてみよ。更に、具体的なパラメータを考えてみよ。例えば、三重微分断面積という概念がある。

反応の Q 値：

反応前後の系を構成する粒子の静止エネルギーの差を反応の Q 値 と呼び、符号は、発熱反応ならば正とする。二体反応ならば、次式で定義される。

$$Q = (m_A + m_a - m_B - m_b)\,c^2$$

微分断面積：

反応に関与する A、 a という粒子が非常に小さくて、確実に衝突させるだけの精度でその位置を制御できないという状況になっている。この状態では、人間が制御できる程度の大きさの A の塊を標的とし、そこへ向けて、粒子 a を打ち込むしかない。a は A に衝突する

かも知れないし、通り抜けるかもしれない。衝突を確率現象として扱うしかない。A の数密度 n_A が小さく、標的核集合の奥行き d も小さければ、通り抜ける確率の方が充分に大きい。標的の単位面積当たりの数は $N_A = n_A \times d$ である。この場合を想定する。この領域へ a が入って来て、立体角で表示すると $d\Omega$ と書かれるある角度領域へ散乱されたとする。単位時間あたりの放出粒子数は N_b は、単位面積当たりの標的数 N_A や単位時間当たりの入射粒子数 N_a 及び立体角 $d\Omega$ に比例すると仮定し、

$$N_b = \frac{d\sigma}{d\Omega} N_A \, N_a \, d\Omega$$

と書いた時、比例係数 $d\sigma/d\Omega$ を微分断面積と呼ぶ。見掛け上、ある物理量 σ を立体角で微分したような記号である。反応や入射エネルギー、散乱角に依存するパラメータである。N_A の次元が面積当たりの (標的の) 個数、$N_a,\ N_b$ は単位時間当たりの粒子数、$d\Omega$ は、立体角、sr (ステラディアン) で表すから、$d\sigma/d\Omega$ は面積/sr の次元をもつ。

この微分断面積を全立体角で積分した物理量を (全) 断面積と呼ぶ場合もある。反応を指定しての積分断面積と呼ぶ方が誤解が少ないだろう。

粒子 A と a の相互作用の到達距離が極端に短いと仮定すると、反応が起こる為には、両者の大きさが空間的に重なる必要がある。入射粒子の進行方向への垂直面に射影した粒子 A の面積を S_A とすると、標的全体では $N_A \times S_A$ の面積を占有している。従って、1 個の粒子 a がここに入射して反応を起こす確率は、単位面積とこの射影面積の比に等しいと考える。従って全断面積は、標的の幾何学的な大きさを想定した概念である。

逆に、相互作用の到達距離が非常に長いと、不都合が起こる概念でもある。

散乱の断面積は単位面積当たりの標的粒子数に比例する。これに関連した話題を二つ提供しよう。

1) 1 cm × 1 cm × 2 cm の大きさの標的を考える。内部には、一様に標的核が詰まっている。2 cm の部分をビームに垂直に置くのと、平行に置くのでは、反応生成物の収量はどちらが多いか？

2) 回折格子には沢山の溝がほられている。ある角度で回折された光の強度 I を測定する。この強度 I は溝 (これが光の散乱体になっている) の数の 2 乗に比例する。

クーロン散乱の断面積は、標的核の原子番号 Z の 2 乗に比例する。標的核の中の陽子が独立に入射粒子に斥力を与えた結果、クーロン散乱が起こっていると考えるならば、断面積は Z に比例するはずである ！？

i 番目の個別の散乱体からの散乱振幅を f_i とする。Z 個の散乱体全てに対して散乱振幅の和をとると、この現象の散乱振幅 f が計算出来ると考える。

$$f = \sum_i f_i = Z \, f_1$$

もしも、全ての散乱振幅が同一ならば、全散乱振幅 f は一つの散乱振幅の Z 倍になる。従って散乱強度 $I \propto Z^2$ という関係式が成立する。

散乱体の大きさや散乱体の間隔が、入射粒子の de Broglie 波長よりも充分に小さければこのような近似が正当化される。この場合を干渉性散乱 (coherent scattering) と呼ぶ。

上に定義した微分断面積は、非干渉性散乱という仮定が暗黙の内になされている。

散乱現象を想定して、二つの座標系を定義する。

実験室系： 観測者が静止している座標系
重心系： 全系の運動量が 0 である座標系 (重心静止系)
系に外力が作用しなければ、重心は散乱過程を通じて静止している様な座標系が存在する。この座標系を重心 (静止) 系と呼ぶ。

重心系は、以下のように幾らか抽象的に (計算に便利な様に) 導入するという事も可能である。

実験室系での、粒子の座標を $\mathbf{r}_A$ と $\mathbf{r}_a$ とする。一方、粒子 A と a の相互作用はその相対座標 $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_A$ の関数 $V(\mathbf{r})$ であると仮定してみよう。座標系の並進操作に対して、物理が (Hamiltonian が) 不変だと仮定するといかにも成立しそうな仮定である。この $\mathbf{r}$ を用いると、2 体問題のシュレーディンガー方程式は変数分離出来るから、問題が簡単になる。そうすると、この座標 $\mathbf{r}$ に独立な座標 $\mathbf{R}$ を、$\mathbf{r}_a$ と $\mathbf{r}_A$ の線形結合として定義する必要がある。交換関係の保存を要求し、以下の様に展開係数を決定する。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{R} = \frac{m_a\,\mathbf{r}_a + m_A\,\mathbf{r}_A}{m_a + m_A}$$

この結果 Hamiltonian は、

$$H = \frac{\mathbf{p}_a^2}{2\,m_a} + \frac{\mathbf{p}_A^2}{2\,m_A} + V(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_A) = \frac{\mathbf{P}^2}{2\,M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\,\mu} + V(\mathbf{r})$$

となる。ここで、$M \equiv m_a + m_A$ であり、$\mu \equiv (m_a \times m_A)/M$ は換算質量である。重心運動と相対運動の運動量 $\mathbf{P}$ と $\mathbf{p}$ は次式で定義される。

$$\mathbf{P} \equiv M\,\frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad \mathbf{p} \equiv \mu \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

仮定に依り、交換関係は保存される。

$$[\mathbf{P}, \mathbf{R}] = -i\hbar, \quad [\mathbf{p}, \mathbf{r}] = -i\hbar, \quad [\mathbf{P}, \mathbf{p}] = 0, \quad [\mathbf{R}, \mathbf{r}] = 0$$

本当は、成分毎に交換関係をかかねばならないが、これでも理解出来るだろう。更に、座標変換のヤコビアン は 1 である。

$$J = \frac{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{R})}{\partial(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_A)} = 1$$

重心系では Hamiltonian が $\mathbf{r}$ と $\mathbf{R}$ の関数の和として書けたから、Schrödinger 方程式の解は $\mathbf{r}$ だけに依存する関数と $\mathbf{R}$ だけに依存する関数の積で与えられる。更に、 $\mathbf{R}$ に依存する部分は運動エネルギーだけだから、平面波で解が表現され、この解は反応の前後で変化しない。従って、今後は重心運動に対応する平面波の部分は無視して議論をする。

運動学的側面
粒子 A と a の実験室系での運動量を $\mathbf{p}_A(=0),\ \mathbf{p}_a$ とし、反応後の粒子の物理量には、B

や b という下付き文字を用いる。入射粒子 a の進行方向を z 軸とし、粒子 b の放出角を θ とすると、エネルギーと運動量の保存則は、次式となる。

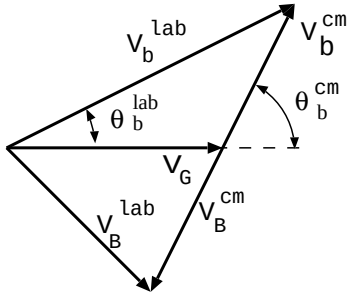
$$\mathbf{p}_B^2 = \mathbf{p}_a^2 + \mathbf{p}_b^2 - 2\,\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b$$
$$\frac{\mathbf{p}_a^2}{2\,m_a} + Q = \frac{\mathbf{p}_b^2}{2\,m_b} + \frac{\mathbf{p}_B^2}{2\,m_B}$$

ここで、実験室系では標的は熱振動を無視して、静止していると仮定した。この式から、散乱角の関数として放出粒子の運動エネルギーを計算する事が出来る。$m_a/m_A < 1$ ならば、解は一意に決まり、散乱角 θ には制限が付かない。$m_a/m_A = 1$ の時には、散乱角は 0 度から９０度迄に制限される。更に $m_a/m_A > 1$ となると散乱角には上限があり、一つの散乱角に対して二つの運動量や運動エネルギーが対応する。

加速器で加速された荷電粒子の運動エネルギーを測定する一つの方法として、上に説明した運動学を利用する方法がある。重い原子核と軽い原子核が混じった標的 (例えばポリエチレン) を陽子で照射する。標的陽子から弾性散乱された陽子 (p_H) と炭素１２原子核の第１励起状態を励起した陽子 (p_C) をある散乱角で検出する。０度では p_H のエネルギーが p_C のエネルギーよりも大きい。しかし有限角度になると p_H のエネルギーは急速に小さくなるのに、p_C のエネルギーはほとんど変化しない。したがって両者が交差する角度が存在する。この角度は、入射陽子の運動エネルギーに依存する。逆に言えば、このエネルギーが一致する角度を測定すれば入射陽子の運動エネルギーを推定する事が出来る。

他の方法として、非常に狭い共鳴準位を励起する事が考えられる。

次に、重心系と実験室系での散乱角や微分断面積の比較 (変換) を考えよう。重心系と実験室系を区別するためには、上付の文字 cm と lab を付ける。実験室系を $\mathbf{v}_G = \dfrac{m_a \mathbf{v}_a^{lab}}{m_a + m_A}$ の速度でガリレイ変換すると重心系に移る。



図を参照しよう。実験室系と重心系の散乱角の間には、以下の関係がある事が分かる。

$$\tan\theta^{lab} = \frac{\sin\theta^{cm}}{\cos\theta^{cm} + \gamma}$$

ここで、γ は速度の比であり、次式で与えられる。

$$\gamma = \frac{v_G}{v_b^{cm}} = \sqrt{\frac{m_a\,m_b}{m_A\,m_B}\frac{E_{rel}}{E_{rel}+Q}}$$

$$E_{rel} = \frac{1}{2}\mu v_a^2 = \frac{m_A\, E_a^{lab}}{m_a + m_A}$$

E_{rel} は重心系に変換した、入射粒子と標的間の相対運動の運動エネルギーである。両系での極角の関係式は、以下の様に書くと、補正項という意味が出て来る。

$$\theta_b^{cm} = \theta_b^{lab} + \sin^{-1}\left(\gamma\, \sin\theta_b^{lab}\right)$$

反応は、軌道角運動量が保存するならば一平面内で起こるから、方位角は実験室系と重心系では同じである。

γ の式を導くには、以下の関係式を経由するのがよいだろう。

$$E_a = m_a\, v_a^2/2 = E_{cent} + E_{rel}, \quad E_{cent} = M\, v_G^2/2 = m_a\, E_{rel}/m_A$$

$$E_{rel} + Q = m_b\, (v_b^{cm})^2/2 + m_B\, (v_B^{cm})^2/2, \quad m_b\, v_b^{cm} = m_B\, v_B^{cm}$$

これらの関係式から v_G/v_b^{cm} を表現すれば良い。

両座標系での立体角の比は次式で与えられる。

$$\sin\theta^{lab}\, d\theta^{lab} = \frac{|1 + \gamma\cos\theta^{cm}|}{(1 + 2\,\gamma\,\cos\theta^{cm} + \gamma^2)^{3/2}}\, \sin\theta^{cm}\, d\theta^{cm}$$

実験室系でも、重心系でも対応する立体角の中にやって来る反応粒子の数 N_b は等しいから、微分断面積に関しては以下の関係式が成立する。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{lab} = \frac{(1 + 2\,\gamma\,\cos\theta^{cm} + \gamma^2)^{3/2}}{|1 + \gamma\cos\theta^{cm}|}\, \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{cm}$$

平面波と球面波・進行波と定在波

散乱問題を重心系で考えることにすると、重心は静止していると考えて良く、散乱の原因となるポテンシャルには重心座標が入っていないと考えられるから、以下の相対運動に対するシュレーディンガー方程式を問題とすれば良い。

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2\,\mu}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) - E\right\}\psi = 0$$

先ず、相互作用が無視できるような状態での解を取り上げておこう。

デカルト座標での解。

$$-\frac{\hbar^2}{2\,\mu}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\psi - E\psi = 0$$

だから、x や y に依存しない解は $\psi^{\pm} = \exp\left(\pm ik\, z\right)$ と書ける事は自明とする。但し、波数 k は エネルギー E と $E = (\hbar\, k)^2/(2\,\mu)$ の関係にある。時間に依存する位相 $-i\omega\, t$ を付け

て考えると、波動関数の位相は $\phi = \pm\, k\, z - \omega\, t$ である。位相が一定 (という事は波動関数の値が一定という事である) という式を微分してみると、$d\, z/d\, t = \pm\omega/k$ であるから、 + $(-)$ の解は、z 軸の正 (負) の方向に進む波である事が分かる。但し、$\omega = E/\hbar$ である。

この波の流束は、

$$j_z = \frac{\hbar}{2\, i\, \mu}\left\{\psi^* \nabla_z \psi - \psi\, \nabla_z \psi^*\right\} = \pm\frac{p}{\mu} = \pm v$$

である。

この解は進行波であったが、この二つの解を重ね合わせて定在波をつくる事が可能である。時間依存性を取り込むと、

$$\psi^+ + \psi^- = \exp\left(i\, k\, z - i\, \omega\, t\right) + \exp\left(-i\, k\, z - i\, \omega\, t\right) = 2\, \cos k\, z \cos \omega\, t$$

右辺は位置と時間依存性が独立しているから、進行波ではありえない。独立解の和で進行波を作ったが、差からももう一つの定在波を作る事が可能である。

∇^2 は座標系の回転に対してスカラーとして振舞うから、任意の方向に進む波は、z 軸を回転する事により作る事が出来る。位相に登場した $k\, z$ を $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ と置き換えておけば良い。ベクトルの内積はスカラーであるから、座標系の回転で値をかえないからである。位相が一定の式を微分すると、波の進行方向は $\mathbf{k}$ に平行である事も了解される。

次に、ポテンシャルが無視できる時の極座標表現での解に移ろう。極座標では、ラプラシアンの表現が少し面倒である。動径方向と角度方向とに変数分離可能である事は知っているとしよう。角度方向のシュレーディンガー方程式は以下の通りである。

$$-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\,\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\,\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\,\phi^2}\right] Y_{\ell,\,m}(\theta,\,\phi) = \ell(\ell+1)\, Y_{\ell,\,m}(\theta,\,\phi)$$

$$-i\frac{\partial}{\partial\,\phi} Y_{\ell,\,m}(\theta,\,\phi) = m\, Y_{\ell,\,m}(\theta,\,\phi)$$

この解は $0 \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le \phi \le 2\,\pi$ で正則であり、周期的な条件を満足する為には、ℓ は 0 又は正の整数であり、m は 絶対値が ℓ に等しいかそれよりも小さい整数でなければならない。角運動量についてはこの後で少し復習をしておこう。

動径方向の解は $u(r)/r$ と $1/r$ を外に出しておくとシュレーディンガー方程式が簡単になる。

$$-\frac{\hbar^2}{2\,\mu}\left\{\frac{d^2}{d\,r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right\} u(r) = \frac{\hbar^2\, k^2}{2\,\mu} u(r)$$

遠心力に起因するポテンシャル $\ell(\ell+1)/r^2$ を無視すると、$u(r) \sim \exp\left(\pm i\, k\, r\right)$ が解であり、複号が正なら原点から出ていく球面波を表し、負ならば逆に原点へ向かって収束する波を表す。

遠心力ポテンシャルを無視しない時には、$R(r) = u(r)/r$ に対する解は、原点で正則な解 $j_\ell(k\, r)$ と原点では正則でない解 $n_\ell(k\, r)$ の重ね合わせで一般解が与えられる。これらの解

は、球ベッセル関数と球ノイマン関数として知られている。この解の不定さは、原点付近及び無限遠点付近での解の振舞いを規定して取り除く。

$$\begin{array}{lll} x \to 0 \text{ の時} & j_\ell(x) \sim x^\ell/(2\,\ell+1)!! & n_\ell(x) \sim -(2\,\ell-1)!!/x^{\ell+1} \\ x \to \infty \text{ の時} & j_\ell(x) \sim \sin{(x-\ell\,\pi/2)}/x & n_\ell(x) \sim -\cos{(x-\ell\,\pi/2)}/x \end{array}$$

ここで、$\ell\,\pi/2$ という位相は遠心力の為に波が押し出されているという意味を持つ。遠心力による位相のずれは必ず $\pi/2$ の整数倍である。何故、こんなところに π が登場するのか不思議と言えば不思議である。

ここで与えた解は定在波を与える。デカルト座標の場合と同様に、これらの解を組み合わせて進行波を作る事が可能である。

$$h_\ell^{(1)}(x) = j_\ell(x) + i\,n_\ell(x), \;\; h_\ell^{(2)}(x) = j_\ell(x) - i\,n_\ell(x)$$

は、第 1 (2) 種の球ハンケル関数と呼ばれる。$h_\ell^{(1)}(x)$ は外向き波であり、$h_\ell^{(2)}(x)$ は内向き進行波である。

問 デカルト座標での解は、sin や cos で与えられたから、全ての点で正則である。一方、極座標で与えた解には、原点で正則な解と発散する解とが登場した。正則性は、座標系に依って保存しない概念である事が分かる。しかし、ある時には正則であるのに、見方に依っては正則でなくなるのは何故だろう？

Rayleigh 展開

デカルト座標での解 $\exp{(i\,k\,z)}$ は、極座標での解 $j_\ell(k\,r)$ で展開できるはずである。正則性を考えると、$n_\ell(kr)$ は登場しない。

$$\exp{(i\,k\,z)} = \exp{(i\,k\,r\,\cos\theta)} = \sum_\ell (2\,\ell+1)\,i^\ell\,j_\ell(k\,r)\,P_\ell(\cos\theta)$$

この式の導き方は、多くの教科書に記載されているから省略するが、次のコメントを与えておこう。右辺の球ベッセル関数を展開すると $(kr)^\ell$ が最低次であり、Legendre 関数は $\cos^\ell\theta$ が最高次である。従って $(kr\cos\theta)^\ell$ の項は一つしか無い事を指摘しておこう。

左辺の運動量の固有状態を、角運動量の固有状態で展開していると見よう。運動量と角運動量は交換可能ではないから、右辺の和は無限項からなっている。逆に、角運動量の固有状態を運動量の固有状態で展開する事は可能だろうか？

左辺は、z 軸に沿って負の側から正の側へ進む進行波であるが、右辺は定在波である。先に説明したのは同じ ℓ の波の重ね合わせであったが、今度は、異る ℓ が重ね合わされている。

次に極角 θ 方向の進行波を紹介しておこう。先に登場した Legendre 関数やその陪関数は極角に関する定在波を与える。進行波を記述するには、ℓ を固定して考えると、独立解

が二つ必要である。そこで 第 2 種 Legendre 関数 $Q_{\ell,m}(\theta)$ に登場してもらう。$Q_{\ell,m}(\theta)$ は陪 Legendre の微分方程式を満足し、$\theta = 0, \pi$ で対数的に発散するから、物理の教科書にはあまり出て来ない。指数関数の肩に $\exp(i$ 何とか$\theta)$ という形で θ を載せる事が出来るならば、極角方向の進行波を作る事が可能である。

Legendre 関数の Diliclet 表示を用い、$\ell >> m$ という条件下では次の近似式が成立する事に注意する。

$$P_{\ell,m}(\cos\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \sin\theta}} \frac{(\ell+m)!}{\Gamma(\ell+3/2)} \cos\{(\ell+1/2)\theta + m\pi/2 - \pi/4\} + O(\ell^{-1})$$

$$Q_{\ell,m}(\cos\theta) \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2 \sin\theta}} \frac{(\ell+m)!}{\Gamma(\ell+3/2)} \sin\{(\ell+1/2)\theta + m\pi/2 - \pi/4\} + O(\ell^{-1})$$

但し、この式は θ が 0 や π 付近では使えない。

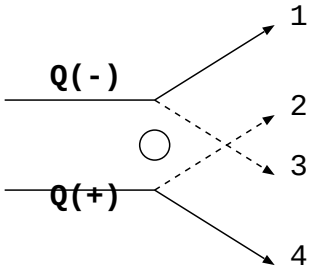
この式を見ると、右辺の三角関数の引数は同一であるが、振幅を示す平方根の中の $\pi/2$ のみが異なるから、以下の量は進行波である事が理解できるだろう。

$$\begin{aligned} Q^{\pm}_{\ell,m}(\cos\theta) \equiv & \frac{1}{2}[P_{\ell,m}(\cos\theta) \pm \frac{2}{i\,\pi} Q_{\ell,m}(\cos\theta)] \\ & \sim \frac{1}{\sqrt{2\,\pi \sin\theta}} \frac{(\ell+m)!}{\Gamma(\ell+3/2)} \exp i\{\pm[(\ell+1/2)\theta + m\,\pi/2 - \pi/4]\} + O(\ell^{-1}) \end{aligned}$$

進行波から定在波に戻すのは非常に簡単である。

$$P_{\ell,m}(\cos\theta) = \frac{1}{2}\{Q^{+}_{\ell,m}(\cos\theta) + Q^{-}_{\ell,m}(\cos\theta)\}$$

Q^{+}, Q^{-} は、前者が反時計、後者が時計周りの極角方向の進行波である事を図を見ながら確認しよう。



軌道番号	衝突前	衝突時	衝突後
1	π	$\pi/2$	$\pi/4$
2	$-\pi$	$-\pi/2$	$-\pi/4$
3	π	$\pi/2$	$\pi/4$
4	$-\pi$	$-\pi/2$	$-\pi/4$

図の様に、z 軸の左側から入って来た粒子の軌跡を考える。○ 印で示した散乱中心からの角度を、粒子の進行方向を角度 0 として測る。従って入射粒子の極角は、散乱から充分前には $\pm\pi$ である。軌道 1 に対する極角の時間依存性は、最初は π であったのが、最後には第 1 象限の角度となるから、極角は大雑把には、π から $\pi/4$ に変化していると考える。即ち、時計周りである。軌道 3 も同様に時計周りである。この軌道 1 と 3 はどちらも、図で見ると標的の左側を通っている。検出器を極角が正の側に置くとすると、散乱された粒子

は検出器に近い側を通っていると考えて、near side と呼ぶ。反対側は、右側通行であるが、習慣的に far side と呼ばれている。

$\ell >> |m|$ という条件は、かなり広い範囲の核反応に対して成立する事が分かる。

角運動量の量子論の復習

角運動量の演算子はベクトルであり、そのデカルト座標での成分を表す為に、記号 $j_x,\ j_y,\ j_z$ を使用する。

これらの演算子は、以下の交換関係を満足する。

$$[j_x,\ j_y] = i\, j_z$$

ここで、i は虚数単位である。この交換関係は、x、y、z に対して、cyclic に入れ換えたものも、同様に成立する。但し、面倒だから、角運動量の単位である $\hbar$ は省略した。

上の交換関係から、$j^2 \equiv j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$ とすると、以下の交換関係が導かれる。

$$[j^2, j_x] = [j^2, j_y] = [j^2, j_z] = 0$$

これらの交換関係から、j^2 と x、y、z 成分のどれかを対角化する表示が存在する。習慣的に j^2 と j_z を対角化する表示をとり、この基底を $|j, m>$ と書く。

$$j^2|j, m>= \eta_j|j, m>, \quad j_z\,|j, m>= m\,|j, m>$$

即ち、j^2 と j_z の固有値はそれぞれ、η_j 及び m とする。これらの固有値を決定する為に、以下で定義される j_z の昇降演算子を導入する。

$$j_\pm = j_x \pm i\ j_y$$

これらの演算子は次の交換関係を満足する。

$$[j^2,\, j_\pm] = 0, \quad [j_z,\, j_\pm] = \pm j_\pm$$

そこで、$|j, m>$ に $j_\pm$ を掛けた状態 $(j_\pm|j, m>)$ を考える。次の式が成立する。

$$j^2(j_\pm|j, m>) = \eta_j(j_\pm|j, m>)$$

これから、状態 $(j_\pm|j, m>)$ も j^2 の固有状態であると言える。一方

$$j_z(j_\pm|j, m>) = (m \pm 1)(j_\pm|j, m>)$$

という関係式を導けるから、状態 $(j_\pm|j, m>)$ は j_z の固有状態であるが、その固有値は m ではなく、それよりも 1 だけ値が増減している。この性質があるから、$j_\pm$ の事を j_z の昇降

演算子と呼ぶ。状態 $(|j_\pm|j,m>)$ と $|j,m\pm1>$ とは定数倍 (位相を含む) しか異らない事が分かった。この状態のノルムを計算しよう。交換関係を適当に変形すると、

$$< j,m|j_\mp\, j_\pm|j,m >=< j,m|j^2 - j_z(j_z\pm1)|j,m >= \eta_j - m(m\pm1)$$

$|j,\, m\pm1>$ のノルムは 1 であるから、

$$(j_\pm|j,m>) = \sqrt{\eta_j - m(m\pm1)}|j,\, m\pm1>$$

位相は、いつも実数であり正であると選んである。

未だ η_j を決めていなかった。角運動量はエルミート演算子であるから j^2 の固有値 η_j は正又は 0 であり、その z 成分の 2 乗 j_z^2 の固有値 m^2 よりも大きいか等しいはずである。

$$\eta_j \geq m^2$$

一方、j_+ を $|j,m>$ に掛けると、m が必ず 1 大きくなるならば、j_+ を何回も $|j,\, m>$ にかけると、上の不等式が成立しなくなる。これは困るから何処かに m の上限値 m_{max} があり、$j_+|j,m_{max}>=0$ となっていなければいけない。同様に、m には下限の存在も必要であり、この下限を m_{min} とする。この上・下限値に対しては

$$\eta_j - m_{max}(m_{max}+1) = 0, \quad \eta_j - m_{min}(m_{min}-1) = 0$$

が成立しなければならない。これから、η_j を消去すると、

$$(m_{max}+m_{min})(m_{max}-m_{min}+1) = 0$$

となり、$(m_{max}-m_{min}+1) \geq 1 > 0$ だから、$m_{min} = -m_{max}$ が成立する。m_{max} から 1 ずつ差し引いていくといつか、m_{min} にたどり着かねばならないから、j_z の固有値 m は整数か半整数である。m_{max} を j と書くと、$\eta_j = j(j+1) = -j(-j-1)$ という式が書き下せる。j は 0 又は正に取っておいて、一般性を失わない。これで、固有値は全て確定した。

$j=1/2$ の場合のは、$\sigma_x = 2\,j_x$ 等と書かれる事もある。具体的な行列表現を例示する。但し、行列の添字は磁気量子数が $m=j$ から始まり $m=-j$ 迄、大きな方から小さな方へ変化している。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

この例はパウリ (Pauli) のスピン行列と呼ばれる事がある。

$j=1$ の場合の例としては、

$$\sqrt{2}\,S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{2}\,S_y = i\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

等がよく文献に登場する。

軌道角運動量と球面調和関数

上では角運動量を交換関係で定義し、j に (非負の整数)/ 2 という条件が付く事を見た。実際に、半奇数の角運動量は電子や核子の固有スピンとして観測にかかっている。一方、非負の整数をとる場合の代表として軌道角運動量がある。ここでは、軌道角運動量の固有関数を簡単に調べる。軌道角運動量である事を強調する意味で、演算子を ℓ と書き換える。以下の様な定義から出発する。

$$\ell_x \hbar \equiv y\, p_z - z\, p_y, \quad \ell_y \hbar \equiv z\, p_x - x\, p_z, \quad \ell_z \hbar \equiv x\, p_y - y\, p_x$$

通常の位置と運動量の交換関係を利用すると、先に書いた角運動量の交換関係そのものが導ける。この交換関係は以下の様に書かれる事もある。

$$\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\ell} = i\, \boldsymbol{\ell}$$

このデカルト座標 (x,y,z) で定義された角運動量演算子を、極座標 $(r,\, \theta,\, \phi)$ で表現する。

$$\ell_\pm = \exp\left(\pm i\phi\right) \left\{ \pm \frac{\partial}{\partial\, \theta} + \cot\theta \left(i \frac{\partial}{\partial\, \phi} \right) \right\}$$

$$\ell_z = -i\, \frac{\partial}{\partial\, \phi}$$

紛らわしいかも知れないが、$\boldsymbol{\ell}^2$ の固有値を $\ell(\ell+1)$、ℓ_z の固有値を m とし、この固有状態は $|\ell,\, m>$ と書く。

ℓ_z の微分方程式は簡単に解け、規格化した固有関数は、$\exp\left(i\, m\, \phi\right)/\sqrt{2\,\pi}$ である。

m が整数であると、ϕ に関して $2\,\pi$ の周期を持つ、一価関数となる。m が整数ならば、ℓ も整数となる。

次に、極角関係の固有状態を調べる目的で、ℓ_z の固有値が最大の場合 $|\ell,\, m=\ell>$ を取り上げる。この状態からは、これ以上 m を増せないから、

$$\ell_+ |\ell,\, m=\ell> = 0$$

$|\ \ell,\, m=\ell>$ の θ 依存部分を $f(\theta)$ と置くと、

$$\sin\theta\, \frac{d\, f(\theta)}{d\, \theta} - \ell\, \cos\theta\, f(\theta) = 0.$$

この方程式は、簡単に解けて、

$$f(\theta) \propto \sin^\ell \theta.$$

後は、規格化定数を決定すれば良い。

$$|\ell,\, m=\ell> = (-1)^\ell \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{2}}\, \frac{1}{2^\ell\, \ell!}\, \sin^\ell\theta\, \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \exp\left(i\ell\, \phi\right)$$

位相部分 $(-1)^\ell$ だけは習慣でこの様にきめる。ここまできまると、この状態に ℓ_- を次々と作用させる事により、任意の m の固有状態波動関数を書き下す事が可能となる。例えば、

$$\ell_- \,|\ell,\, m=\ell>=\sqrt{(\ell+\ell)(\ell-\ell+1)}\,|\ell,\, m=\ell-1>$$

知識があれば、 $|\ell,\, m=\ell>$ は、ルジャンドルの陪関数と指数関数の積である事が分かり、昇降演算子もルジャンドル陪関数のそれである事が理解できるだろう。

従って、$|\ell,\, m>= Y_{\ell,m}(\theta,\,\phi)$ と書くと、 $m \geq 0$ に対して

$$Y_{\ell,m}(\theta,\,\phi)=(-1)^m\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_{\ell,\,m}(\cos\theta)\exp\left(i\,m\,\phi\right)$$

$$Y_{\ell,-m}(\theta,\,\phi)=(-1)^m\,Y_{\ell,m}(\theta,\,\phi)$$

という式が導ける。

理解を助ける為に、簡単な例を挙げておこう。

ベクトル $(\mathbf{a})$ は角運動量を 1 単位持っている事を例示する。このベクトルの大きさを a、極角と方位角を $(\alpha,\,\beta)$ とする。一方、$\ell=1$ に対応する角運動量の固有状態である球面調和関数は以下の様な具体的な形を持つ。

$$Y_{1,0}(\theta,\,\phi)=\sqrt{\frac{3}{4\,\pi}}\cos\theta,\quad Y_{1,\pm1}(\theta,\,\phi)=\mp\sqrt{\frac{3}{8\,\pi}}\sin\theta\exp(\pm i\phi)$$

この形とベクトルの極座標表現とを勘案して、以下の様に定義してみる。

$$a_0=a_z=a\,\cos\beta$$

$$a_{\pm1}=\mp\frac{a_x\pm i\,a_y}{\sqrt{2}}=\mp\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\alpha\exp(\pm i\beta)$$

この表現での単位ベクトルはデカルト座標での単位ベクトルとは以下の関係を持つ。

$$\mathbf{e}_0=\mathbf{e}_z,\;\;\mathbf{e}_{\pm1}=\mp\frac{\mathbf{e}_x\pm i\,\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}$$

こうすると、以下の関係式が成立する。

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{e}_x+a_y\mathbf{e}_y+a_z\mathbf{e}_z=\sum_{m=-1}^{1}a_m\,\mathbf{e}_m$$

即ち、新しい表現 (球表現) でもベクトル $\mathbf{a}$ は 3 個の独立な成分を持ち、それらは、$\ell=1$ の球面調和関数を用いて書き下せる。即ち、角運動量を 1 単位持っている。

ベクトルを 2 個組み合わせると (双 1 次形式を作ると)、色々な角運動量を持つ量を作り得る事を例示する。$\mathbf{a}$ とは異なる、もう一つのベクトルを $\mathbf{p}$、その大きさを p、極角と方位角を $\theta,\,\phi$ とする。

角運動量 0 を作る為に、以下の線形結合を考えよう。

$$a_1\,p_{-1} - a_0\,p_0 + a_{-1}\,p_1 = -\{(a_x + ia_y)(p_x - ip_y) + (a_x - ia_y)(p_x + ip_y)\}/2 - a_z p_z = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}$$

右辺はベクトルのスカラー積であるから、座標系の回転に対して不変である。即ち、角運動量は 0 である。即ち、極角や方位角には依存しない。

次に 1 単位の角運動量を持つ量を作る。磁気量子数に対応して 3 個存在する。先に示したようにベクトルは 1 単位の角運動量を有するから、二つのベクトルから、一つのベクトルを作れば良いと考えると、答えは自明であろう。ベクトル積を作ればおしまいである。さぼってしまおう。

最後に 2 単位の角運動量の例を示す為に、次の線形結合を考える。

$$a_1 p_{-1} + 2\,a_0 p_0 + a_{-1} p_1 = a_x p_x + a_y p_y + 2a_z\,p_z = ap\{2\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\cos(\beta - \phi)\}$$

この式が 2 単位の角運動量を持つ事はあまりはっきりしないので、$\mathbf{a}$=$\mathbf{p}$ と無理矢理に仮定してみる。こうすると、右辺は $a^2(3\cos\alpha - 1) \propto Y_{2\,0}(\alpha,\,\beta)$ であるから、2 単位の角運動量を有する事が明らかとなった。

これらの双 1 次形式は、独立なものが 9 個存在する。一方、角運動量が 0 のものは 1 個、角運動量が 1 のものは 3 個角運動量が 2 のものは 5 個の独立成分を有する。 1 + 3 + 5 = 9 であるから、 2 よりも大きな角運動量をこの双 1 次形式から作る事は出来ない。

ここで用いた、線形結合の係数 (に比例する量) が Clebsch-Gordan 係数である。

もう一つだけ注意しておこう。合成されるべき二つの角運動量は独立である事を最初に仮定した。この仮定が破れる場合も考える必要がある。極端な場合としては、同一の角運動量を合成して新しい角運動量状態を考えたい時である。上の角運動量が 1 の場合をもう一度思い起こそう。同一のベクトルのベクトル積は 0 ベクトルであるから、 1 単位の角運動量は作れないという結論となる。この様に、独立でない場合には、角運動量の合成以外に制限が付く。今の例の場合はパリティーの保存則から来る制限だと思っておくと良い。即ち、合成さるべき二つのベクトルは負パリティーを有する。従って合成後のパリティーは正でなければならない。一方、角運動量が 1 の状態は負パリティーを持つから、その合成が禁じられる (振幅が 0 となる)。禁止則があるだけでは、確率の保存が成り立たなくなる。確率の保存を満たす為に、合成された 0 や 2 の状態の振幅は、独立な量の合成の場合よりも増えているはずである。

角運動量状態が、電子や陽子や中性子の波動関数であったとする。これらの粒子の波動関数は Pauli 原理を満足せねばならないので、純粋な角運動量の合成規則の上に更に制限が付く事を覚えておかねばならない。例えば、二つの電子が同じ半奇数 j の状態にあるとする。この二電子の合成系の角運動量 J は、角運動量の合成則だけからは $J = 0, 1, \cdots, 2j$ のどれかの整数を取り得るが、Pauli 原理を満足するという条件から、$J = 0, 2, \cdots, 2j - 1$ という偶数値は取り得ない。三体系以上では更に複雑な様相を示すだろう事は明らかだろう。coefficient of fractional parentage (cfp) と呼ばれる概念が使用され、その内に原子 (物性) 物理や原子核構造の理論で登場するだろう。

Clebsch-Gordan 係数

お互いに独立な二つの角運動量の固有状態 $|j_1,\, m_1>,\ |j_2,\, m_2>$ があったとする。例えば一方の波動関数は粒子 1 、他方は別の粒子 2 に対応すると仮定する。この二つの粒子で構成する系の全角運動量はいくらだろうか？というのがここでの問題である。二つの粒子の角運動量ベクトルは、ある量子化軸 (z 軸とする) とはある角度をなす方向を向いていると想定できる。$j_1,\ j_2$ の大きさを固定して考えると、それぞれの角運動量の向き $((j_i)_z\ \ (i=1\ \ or\ \ 2)$) の自由度 はそれぞれ $2\,j_i+1$ 個あるから全体ではその積の数 $(2\,j_1+1)(2\,j_2+1)$ 個だけの組合せがある。従って、次式で定義される全角運動量の演算子は $\mathbf{j}=\mathbf{j}_1+\mathbf{j}_2$ の固有値は一つではない。

一方、量子化軸成分 $j_z=(j_1)_z+(j_2)_z$ は単純な和になるのは、この定義から明らかだろう。この事実を用いると、j の大きさの取り得る範囲を決定できる。先ず、m_1+m_2 の最大値は、j_1+j_2 であるから、この値が j の最大値である。j の大きさが j_1+j_2 ならば、その z 成分は $(2(j_1+j_2)+1)$ 個の値のどれかを取る。これで、全自由度 $(2\,j_1+1)(2\,j_2+1)$ の内、$(2(j_1+j_2)+1)$ 個が使用された。残りの自由ををを尽くすまで、j の大きさを最大値から 1 ずつ減らして行けば良い。j の取り得る値の最小値は $|j_1-j_2|$ である事が、自由度の数を勘定すると分かる。$j_1\geq j_2$ を仮定して実際に数えてみる。

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}(2\,j\ +1)=(2\,j_1+1)\times(2\,j_2+1)$$

はすぐに証明できるだろう。二つのベクトル $\mathbf{j}_1,\ \mathbf{j}_2$ の和のベクトルの大きさの範囲は、直観的にも $|j_1-j_2|$ から j_1+j_2 というのは納得出来るだろう。

二つの粒子の波動関数 $|j_1,\, m_1>,\ |j_2,\, m_2>$ の積和で、j の固有状態 $|(j_1\,j_2)j,m>$ を展開したい場合がある。

$$|(j_1\,j_2)j,m>=\sum_{m_1+m_2=m}|j_1,\, m_1>|j_2,\, m_2><j_1,\, m_1\ j_2,\, m_2|(j_1\,j_2)j,m>$$

この時の展開係数 $<j_1,\, m_1\ j_2,\, m_2|(j_1\,j_2)j,m>$ を Clebsch-Gordan 係数とよぶ。波動関数の位相を適当に選び、Clebsch-Godran 係数は実数にする。上の変換は、ユニタリー変換であるから、逆変換も存在する。

$$|j_1,\, m_1>|j_2,\, m_2>=\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}|(j_1\,j_2)j,m><(j_1\,j_2)j,m|j_1,\, m_1\ j_2,\, m_2>$$

これだけの情報では、ユニタリー変換を確定する事は出来ない。Condon と Shortley が Theory of Atomic Spectra という本の中で定義した位相関係が使用される。

Clebsch-Gordan 係数のここでの書き方では、$|j,\, m>$ という状態の起源である $j_1,\ j_2$ を明示する為にわざわざ括弧で括り $|(j_1\ j_2)j,\, m>$ と書いた。しかしこの様な書式は面倒であるから、今後は省略する場合がある。

孤立系では、角運動量が保存する。この孤立系が内部構造を有するならば、そしてその内部構造の構成要素が電子や核子の様にスピンを持っていたり、運動に伴う軌道角運動量があるならば、このような角運動量の操作は絶対的に必要な知識である。３個又は４個の角運動量の間の結合関係を記述するのに、Racah 係数や 9-j 係数といった更に複雑な係数も頻繁に使用される。

Clebsch-Gordan 係数の数値計算

多くの量子力学の教科書に数値計算例が紹介されているが、漸化式の使い方がまずいと思う。そこでもっと良い方法を紹介する。この手法は、多くの階乗を含む Racah や Wigner の式が破綻を来す様な大きな角運動量に対しても適用出来る。

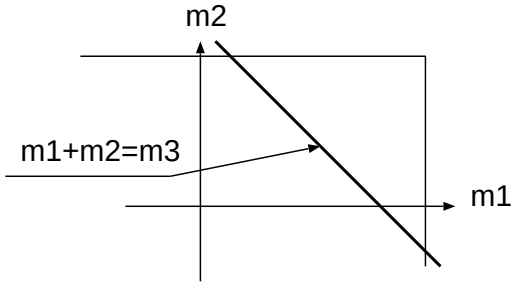
先ず、Clebsch-Gordan 係数の定義式を書く。

$$|j_1\, m_1, j_2\, m_2 >= \sum_{j_3} |j_3\, m_3 >< j_3\, m_3|j_1\, m_1, j_2\, m_2 >$$

ここで、$m_3 = m_1 + m_2$ である。この式に $(\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2)^2 = \mathbf{j}_3^2$ を掛ける。左辺では、$(\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2)^2 = \mathbf{j_1}^2 + \mathbf{j}_2^2 + 2\mathbf{j_1} \cdot \mathbf{j}_2$ 、 更に内積は昇降演算子で置き換え、固有状態と固有値の定義を使用すると、以下の漸化式が導ける。

$$\{j_3(j_3+1) - j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1) - 2m_1\, m_2\} C(m_2) =$$
$$\sqrt{(j_1 - m_1 + 1)(j_1 + m_1)(j_2 + m_2 + 1)(j_2 - m_2)}\, C(m_2 + 1)$$
$$+ \sqrt{(j_1 + m_1 + 1)(j_1 - m_1)(j_2 - m_2 + 1)(j_2 + m_2)} C(m_2 - 1)$$

ここで、簡略化の為に以下の様に書いた。$C(m_2) \equiv < j_3\, m_3|j_1\, m_1, j_2\, m_2 >$ 即ち、j_1, j_2, j_3, m_3 は今後は書かないが、いつも固定的な値を共有している。この結果、m_1 又は m_2 のみが自由に変えられる。後の都合で m_2 を独立変数にとる。



この漸化式は、左に図示する $m_1,\ m_2$ 面上の $m_1 + m_2 = m_3$ という直線上の格子点で意味がある。但し、$|m_1| > j_1$, 及び $|m_2| > j_2$, という領域では $C(m_2) = 0$ である。

この漸化式で $m_1 = j_1$ 又は $m_2 = -j_2$ とおく。与えられた条件によるが、どちらかを選択する事は必ず可能である。この時、漸化式の右辺の 2 項の内、一方の係数が 0 となり消えてしまう。$m_2 = -j_2$ ととったとしよう。漸化式はこの場合、$C(m_2 = -j_2 + 1)$ は既知の比例係数を用いて $C(m_2 = -j_2)$ に比例すると言っている。この事実を知った後では、

$m_2 = -j_2+1$ の場合の漸化式は $C(m_2 = -j_2+2)$ も既知の比例係数を用いて $C(m_2 = -j_2)$ に比例すると述べている。比例係数は、ユニタリー性の式

$$\sum_{m_2} < j_3\, m_3 | j_1\, m_1, j_2\, m_2 >^2 = 1$$

により絶対値が決定される。残るは、先に述べた Condon-Shortley の符号規則に習って符号を決定すれば良い。$C(m_1 = j_1) > 0$ 又は $C(m_2 = -j_2) > 0$ である。

大きな角運動量に対しては、数値計算上の工夫が必要である。

CG 係数は一つだけ登場する事は稀であり、磁気量子数について和をとりたい場合がある。この漸化式は、この様な場合に特に有効である。

j_3 について和を取りたい場合には、導出するのに面倒な計算が必要な、以下の漸化式から出発するのが良い。

$$\left\{ m_1 + m_3 \frac{A}{J} \right\} C(j_3) = X(j_3) C(j_3 - 1) + X(j_3 + 1) C(j_3 + 1)$$

ここで、

$$A \equiv j_2(j_2+1) - j_1(j_1+1) - j_3(j_3+1), \quad J \equiv 2j_3(j_3+1)$$

$$X(j_3) \equiv \sqrt{\frac{(j_3^2 - m_3^2)(j_3 - j_1 + j_2)(j_3 + j_1 - j_2)(j_1 + j_2 + j_3 + 1)(j_1 + j_2 - j_3 + 1)}{4\, j_3^2\, (2j_3 - 1)(2j_3 + 1)}}$$

この式では、j_1, j_2, m_1, m_2, m_3 は固定されている。

Wigner-Eckart の定理

ある種の演算子はそれ自身が角運動量を持っていると理解出来る。例えば、ベクトルで表せる演算子は角運動量を 1 単位持っている。光子は電磁場ベクトルで与えられるから、最低限 1 単位の角運動量を持たねばならない。この事を光子のスピンは 1 であると言う人がいる。

角運動量 ℓ, m を持つ演算子 $(T_{\ell,m})$ を角運動量の固有状態 $< j_2,\, m_2|$ と $|j_1,\, m_1 >$ で挟んだ時、次の様に Clebsch-Gordan 係数と 換算行列要素との積で表せる事が知られていて、この事を Wigner-Eckart の定理と呼ぶ。

$$< j_2,\, m_2 | T_{\ell,m} | j_1,\, m_1 >= \frac{1}{\sqrt{2\, j_2 + 1}} < j_1,\, m_1\ \ell, m | (j_1, \ell) j_2\, m_2 >< j_2 \| T_\ell \| j_1 >$$

右辺後半のブラケットの部分 $< j_2 \| T_\ell \| j_1 >$ を換算行列要素と呼ぶ。Clebsch-Gordan 係数が、行列要素の幾何学的な配置 (向き) に関する情報を担い、換算行列要素が演算子の物理的な内容を担っている。この定義では、換算行列要素は、左右をひっくり返しても、絶対値は変わらない。

$$| < j_2 \| T_\ell \| j_1 > | = | < j_1 \| T_\ell \| j_2 > |$$

絶対値が変わるような定義を使用する人もいるので要注意である。

状態 $|j_1,\, m_1>$ に演算子 $T_{\ell,\,m}$ を演算すると、$T_{\ell,\,m}|j_1,\, m_1>=\sum_j <\ell\, m\, j_1\, m_1|j\, m+m_1>|(\ell+\mathbf{j}_1)j,\, m+m_1>$ と書きたくなるところだが、Wigner-Eckart の定理に登場する Clebsch-Gordan 係数の中での結合は $\mathbf{j}_1+\ell$ の順番となっている点に注意。理由は、全体として角運動量が 0 となる様な結合にしたいからである。

Wigner-Eckart の定理に登場するブラとケットはある物理的な状態であり、演算子 $T_{\ell\, m}$ はこれらの状態間の遷移に関係すると考えてみよう。ブラもケットもどちらもが半奇数 (整数) スピン状態であるとする。即ち、ボーズアインシュタイン統計を満足する状態と、フェルミディラック統計の状態間の遷移は禁止されていると仮定する。この時には、演算子 $T_{\ell\, m}$ が持ち得る角運動量は整数であると結論付けられる。

別の言葉で言えば、相互作用を媒介する場 (又は粒子) の持ち得るスピンは必ず整数であり、半奇数ではありえ無い。

例えば、角運動量演算子 $\mathbf{j}$ や磁気能率演算子 $\boldsymbol{\mu}$ はどちらもベクトルであるから、角運動量を 1 単位持っている。従って、以下の等式が成立する。

$$<j_2,\, m_2|\boldsymbol{\mu}_i|j_1,\, m_1>=g\mu_B<j_2,\, m_2|\mathbf{j}_i|j_1,\, m_1>$$

ここで、$g\,\mu_B$ は以下の様に換算行列要素の比である。

$$<j_2\|\boldsymbol{\mu}_i\|j_1>=g\mu_B<j_2\|\mathbf{j}_i\|j_1>$$

μ_B は異る物理量の次元を揃える為に導入された定数であり、Bohr 磁子と呼ばる事もある。核物理の世界では、μ_B の替わりに μ_N と書き、核磁子と呼ぶ。g は無次元の数値であり、(ランデの) g 因子と呼ばれる。

μ_B に関するコメント

質量密度 ρ_m と電荷密度 ρ_c との比が場所に依らず一定 $\rho_c/\rho_m=q/m$ であるような剛体を想定する。この剛体がその重心を通るある軸を回転軸として角速度 ω で回転しているとしよう。この剛体の角運動量 j は次式で与えられる。

$$j\hbar=\omega\int\rho_m r_\perp^2\,dv$$

剛体を回転軸に垂直な面で切ったとすると、この面内には円電流が流れている。この円電流は等価磁気能率を有する。この円電流の持つ等価磁気能率を回転軸に沿って積分したすると、この剛体が有する磁気能率 μ となる。

$$\mu=\frac{\omega}{2}\int\rho_c\, r_\perp^2\,dv$$

この二つの式から、$\mu_B=q\hbar/2\,m$ という関係式が導ける。正確には、m として電子質量をとった場合が ボーア磁子であり、陽子質量をとった場合が核磁子である。但し、$\mu_B>0,\ \mu_N>0$ という符号を採用している。このモデルでは、磁気能率は電荷に比例し、質量に反比例する。電子の磁気能率は陽子の磁気能率よりも 3 桁は大きいという事が納得できる。

一方、何故中性子は磁気能率を有するのだろういう疑問も湧き、中性子は、複合粒子であるというイメージへと導く。上の式を見ると、中性子の内部は正に、外部は負に帯電しているならば、中性でも負の磁気能率を持つ事が可能である。即ち、内部構造を有する複合粒子である。

この様な等式が成立する事を踏まえて、次の様な演算子の関係式が教科書に登場する場合がある。

$$\boldsymbol{\mu}=g\,\mu_B\mathbf{j}$$

この式は、角運動量の固有状態で挟むという事を暗黙の内に仮定した時にだけ成立し、g は状態に依存する無次元パラメータである。

クーロン散乱

ここでは、厳密に解が知られている例として、クーロン散乱を取り上げて、各種解法を理解する。次の様な話題を提供する。

1 Newton の運動方程式を解く
2 Hamilton-Jacobi の方程式を解く
3 Schorödinger 方程式を放物座標で解く
4 Schorödinger 方程式を極座標で解く
5 Dirac 方程式を極座標で解く

原子核からの電子散乱がわかると、原子核の電荷分布に関する情報を引き出す事が可能になり、幾らか原子核物理らしくなる。

ニュートンの運動方程式とクーロン散乱

ここでは、点電荷間に働く力を仮定し、ニュートンの運動方程式を解いて散乱問題を復習する。

出発点となる運動方程式。

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{C\,\mathbf{r}}{r^3}$$

当然 m は換算質量であり、$C = \dfrac{Z\,z\,e^2}{4\pi\epsilon_0}$ はクーロン力の強さである。この方程式には 3 個の積分が存在する。

エネルギー積分　運動方程式に $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ を両辺にスカラー的に掛けると良い。

$$\frac{d}{dt}\left\{mv^2/2 + C/r\right\} = 0$$

中括弧の中は習慣的に E と置かれ、エネルギーと呼ばれる。

角運動量積分　角運動量は以下に定義される。

$$\mathbf{L} \equiv m\mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

歴史的には、面積速度一定の法則と呼ばれる事がある。軌道面が定義出来る事の方が重要であると思うが、こちらを強調するばあいの方が少ない様である。

$\mathbf{L}$ は軌道の陪法線に平行である。Frenet-Serret の公式を知っていると、$d\mathbf{L}/dt = 0$ は、軌道が捻れていない事であり、逆に 0 でなければ、軌道面は時間的に一定でない。

離心ベクトル　次式で定義される離心ベクトルは、最近接点を向くベクトルであり、その大きさは離心率に等しい。

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{L}}{C} + \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} = 0$$

運動方程式は 2 階であるから、全部で 6 個の自由度を確定すると運動が確定する。ここで挙げた積分は、全部で 7 個の量を決定している。従って、これらの間には一つの関係式が存在する。それは、以下の様に取られる事が多い。

$$\epsilon^2 = 1 + 2\frac{E\,L^2}{mC^2}$$

即ち、離心率はエネルギーと角運動量を与えると確定する。

エネルギーは散乱状態では正であり、束縛状態では負である。そうなる様にポテンシャルの原点を選んだ。束縛状態を考えると、右辺第 2 項は負の数値を与える。従って束縛エネルギーが同じならば、軌道角運動量が大きい方が離心率は小さい、即ち軌道は円に近くなる。例えば、$2\mathrm{s}$ と $2\mathrm{p}$ という原子の電子軌道を比較してみると良い。この関係式は必ずしも、世間的には良く知られていないと思われる。

離心率ベクトルの式に $\mathbf{r}$ をスカラー的に掛けると、軌道が分かる。

$$r = \frac{\ell}{\epsilon\cos\theta - 1}, \quad \ell = \frac{L^2}{mC}$$

ℓ は半直弦と呼ばれる事がある。θ は離心ベクトルから測った角度である。

エネルギーが正ならば ϵ は 1 よりも大きいから、軌道は双曲線を描く。即ち、双曲線を描きながら無限の遠方から標的に近付き、散乱体に衝突しないならば、やがて通り過ぎてしまう。軌道の式の分母 = 0 が漸近線を与え、散乱角は $\Theta = \pi - 2\cos^{-1}(1/\epsilon)$ 又は $\epsilon\,\sin\Theta/2 = 1$ と与えられる。

無限遠での速度 v_0、衝突径数 b、及び角運動量 L の間には以下の関係がある。

$$m\,b\,v_0 = L, \quad \text{又は} \qquad \epsilon^2 = 1 + \left(\frac{2\,E\,b}{C}\right)^2$$

左側の式は、衝突径数の定義だと思っても良い。

散乱断面積は、以下の様にして書き下せる。入射粒子は一様な面密度で標的に向かっているとする。その内、衝突径数が $b \sim b + db$ にある粒子は全て、上の式で与えられた散乱角で決まる微小角度範囲に散乱される。問題の回転対称性により、散乱は方位角 Φ には依存しない。従って、単位面積当たりの入射粒子数と (Θ, Φ) 方向への散乱粒子数の比は、この方向へ散乱される面積 $b\,db\,d\Phi$ そのものとなる。

$$\text{相対散乱強度} = -b\,db\,d\Phi = \frac{d\sigma}{d\Omega}\,\sin\Theta d\Theta d\Phi = \frac{\cos\Theta/2}{2\sin^3\Theta/2}\left(\frac{C}{2E}\right)^2 d\Theta d\Phi$$

これから、$\mathrm{Rutherford}$ 散乱の微分断面積は次式で与えられる事が分かる。

負号は、微分断面積が正になる様に、散乱角が増えると散乱強度は減るから、決められた。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{C}{4E\sin^2\Theta/2}\right)^2$$

この式の特徴は、微分断面積の大きさを決める因子 $\left(\frac{C}{4E}\right)^2$ と角度依存性を決める因子が完全に分離されている事である。

C/r の次元はエネルギーであるから、C/E の次元は長さである。従って、微分断面積が $(C/E)^2$ の関数で与えられるのは、納得しやすい。散乱角 Θ の関数である微分断面積を無理矢理に、$\Theta/2$ の関数として書いたから、分母に 4 という数字が登場する。

このクーロン散乱に登場する唯一の長さのパラメータは、C/E である。従って、クーロン散乱の問題は C/E でのみ、長さに依存している。もしもう一つ独立な長さを与える物理量が登場すると、両者の干渉が観測されるだろうから、微分断面積に、干渉に起因する構造が期待されるだろう。

この微分断面積の式を全立体角に付いて積分すると、発散する。この発散に関して二つのコメントを与えておこう。

1) そもそも微分断面積の定義へ戻ると、単位面積当たりにある密度で標的が与えられている。これは、暗黙の内にこの単位面積内に入射粒子が入って来なければ、散乱されないと仮定している事である。

一方、今の近似の範囲では、単位面積を外れた粒子も散乱されている。即ち、外れの粒子も当たりと勘定している所に問題がある。

2) 現実に戻ると、原子核の外の方、例えば水素原子では約 ５００ pm (ピコメートル) の位置には電子がいて、原子核の電荷を遮蔽している。従って、あまり遠く迄原子核の電場が及んでいるというのは、近似が単純すぎる。

この Rutherford の公式は、量子力学的な計算とも矛盾しない。その理由を考えておこう。

先頭に書いたように、軌道は 3 個の積分で完全に決定されてしまう。量子力学ではこの事情がどうなっているかを、調べれば良い。先ずエネルギー積分である。量子力学的にもエネルギーが保存する事は知っている。

次は角運動量である。中心力とハミルトニアンが交換する事も良く知られた事実である。

最後に離心ベクトルである。離心ベクトルの構造を見ると、$\mathbf{v} \times \mathbf{L}$ が入っている。そして $\mathbf{v}$ と $\mathbf{L}$ が交換しない事は明らかである。従って、ハミルトニアンと離心ベクトルとは交換しない。しかし、この部分を対称化すると、ハミルトニアンと交換する事が分かる。

山内・宮沢著 大学演習 量子物理学 (裳華房) を参照。

即ち、古典力学でも量子力学でもほとんど同じ積分が運動の恒量として存在する。

実験的には、微分断面積の絶対値が与えられるという意味で、非常に有難い公式である。断面積を測定する為には、(1) 入射粒子の個数、(2) 標的粒子の面積当たりの個数、(3) 検出器が標的を見込む立体角、(4) 検出粒子の数を知らねばならない。もしも弾性散乱粒子の数と、調べたい反応により放出される粒子とが同時に検出されるならば、この弾性散乱された数と、調べたい反応の粒子数の比にクーロン散乱の微分断面積を掛ければ、調べたい

反応の微分断面積が決定できる。勿論こんな事が言えるのは、弾性散乱は完全にクーロン力で起きていると言う仮定が成立しなければならない。

作用積分と **Hamilton** の原理

次の積分を作用積分と呼ぶ。

$$I = \int L dt = \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt$$

ここで、L は ラグランジアンであり、$\mathbf{p}$ は運動量、$\mathbf{q}$ は位置座標、H はハミルトニアンである。積分は、粒子の軌道を想定し、始点と終点は二つの時刻での軌道上の 2 点だとする。Hamilton は、この作用積分が極小値をとる様な軌道が、現実の軌道であるという要請をおいた (Hamilton の原理)。

最小作用の原理と呼ばれる事もある。しかし以下の注釈から分かるように、作用積分が極値をとることが必要ではあるが、最小値をとる必要はない。この意味で、最小作用の原理という言葉は歴史的な意味しかないので、使用しない方がよいだろう。

この Hamilton の原理は、ハミルトニアンが時間に依存しないエネルギー (E) に等しく、運動量 $\mathbf{p}$ がある時間に依存しない関数 $S(\mathbf{r})$ の勾配で与えられるならば、自動的に満足される。即ち、

$$W(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}) - E\, t, \quad \mathbf{p} = \nabla S(\mathbf{r})$$

だとすると、$I = W(final) - W(initial)$ は途中の経路に依らないからである。

(1) 解析力学は学生時代に習うが、上の積分の H の前に現れる負号には当惑した覚えがある。何故こんなところに負号が登場するのだろう？

今ならば積分記号の中を $p^\mu\, dx_\mu$ と書いて相対論的な不変式になっているから、当然だねと言う。即ち、負号は我々の住んでいる 4 次元空間の計量に起源を有するのである。

(2) すると作用積分は、物理的に意味のある考察すべき対象であると言える。この構造を見て、何を表すかはすぐに言える。波の位相である。

(3) 波の位相である為には、作用積分の次元を消しておかねばならない。作用積分は、'作用' の次元を持っている。作用積分を作用の次元で割って、無次元化したものは波の位相と考えて良い。

(4) 作用の次元として何を単位に取るか？ これは難しい。結論的に言うと、ボーア と ゾンマーフェルトの量子化条件を参考にすれば良い。即ち、作用積分 $I/\hbar$ を考える。

(5) $I/\hbar$ が始点と終点間を移動する間の位相変化である。

(6) 実現される軌道に対して作用積分が極値をとるという事は、この軌道近傍を通過する波は全て同位相であり、相加的に干渉すると考える。

(7) 逆に言うと、少し離れた場所を通る波は相殺的に干渉するから、実際問題としては実現されない。

(8) ここまで来ると、Feynmann が考えた経路積分という意味が分かる。

(9) しかし、このようなアイデアは Hamilton が既に持っていたという節がある。

(10) 相殺的に干渉すべき二つの波の内の一方を何らかの方法で消してやれば非日常的な現象が観察される。Fresnel の zone plate や 回折格子の例を引用すれば良いだろう。

即ち、光学者は昔から知っていた事である。

ここでは、$\mathbf{p} = \nabla S(\mathbf{r})$ に注目しよう。この式は、S= 一定と言う曲面を考えると、運動量はいつもこの曲面に垂直であると言っている。別の言葉で言うと、S は波面を表し、運動量は流線を表す。

小谷・梅沢著 大学演習 量子力学 (裳華房) と伏見著 現代物理学を学ぶ為の古典力学 (岩波書店) を参考にしながら、クーロン散乱の波面を具体的に計算しよう。

その前に必要となる、放物座標の復習をしておこう。

放物座標

問題は回転対称性を持つから、2 次元だと仮定しておこう。入射粒子の進行方向を z 軸、粒子の運動は xz 面内で起こると考えて、x ー z というデカルト座標と、放物座標の関係を付けよう。

$$\xi = (r - z)/2, \quad \eta = (r + z)/2, \quad r^2 = x^2 + z^2$$

$\xi =$ 一定と言う曲線は、原点からの距離 r と x 軸からの距離 z の差が一定な点の軌跡で与えられる。即ち、この曲線は放物線である。z の符号を変えると、$\eta =$ 一定というのも別の放物線を与える事が分かる。

放物座標で問題を考えるには、先ず微分要素を考えねばならないから、線素 ds^2 を計算しよう。$ds^2 = dx^2 + dz^2$ であり、r^2 を経由すると ξ, η へ変換しやすい。

$$ds^2 = \frac{r^2}{r^2 - z^2} \left\{ dr^2 - 2\frac{z}{r} dr\, dz + dz^2 \right\}$$

dr と dz は $d\xi$ と $d\eta$ で表現すると、

$$ds^2 = (\xi + \eta) \left\{ \frac{d\xi^2}{\xi} + \frac{d\eta^2}{\eta} \right\}$$

最初の座標軸の定義から考えて当然ではあるが、ξ と η に対して対称である。$d\xi\, d\eta$ という交差項が登場しないから、この放物座標系は直交座標系である。

この表現から scale factor が計算出来たから、勾配とラプラシアンは以下の様に書き下せる。

$$\nabla\phi = \sqrt{\frac{\xi}{\xi + \eta}} \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \mathbf{e}_\xi + \sqrt{\frac{\eta}{\xi + \eta}} \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \mathbf{e}_\eta$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\xi + \eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial\eta} \right) \right\} \phi$$

ラプラシアンは後で利用する。

線素 $ds^2 = \sum_i h_i^2\, du_i^2$ と書けるならば、

$$\nabla\phi = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}\mathbf{u}_i$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\right\}\phi$$

と与えられる。放物座標の第 3 成分の scale factor $h_\psi^2 = 1/\xi\,\eta$ を知っている必要がある。

クーロン散乱の波面の計算

ハミルトニアンをエネルギー E と等置すると、次の式が書き下せる。

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2\,m} + \frac{C}{r} = E = \text{一定}$$

C はクーロン力の強さである。

ここで、先に書いた指導原理により、運動量を次式 $\mathbf{p} = \nabla S$ で書き換える。

$$\frac{1}{2\,m}\frac{1}{\xi+\eta}\left\{\xi\left(\frac{\partial S}{\partial\xi}\right)^2 + \eta\left(\frac{\partial S}{\partial\eta}\right)^2\right\} + \frac{C}{\xi+\eta} = E$$

この方程式は、和の形に変数分離出来る。

$$S(\xi,\,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

F と G に対する方程式は、次の様に書き下せる。

$$\xi\left(\frac{d\,F}{d\xi}\right)^2 - 2\,m\,E\,\xi + A = 0, \quad \eta\left(\frac{d\,G}{d\eta}\right)^2 - 2\,m\,E\,\eta + B = 0$$

分離定数 A、B の和は, 次式で与えられる。

$$A + B = 2\,m\,C$$

実際問題としては、分離定数の自由度は一方だけに押し込めておいてもよいから、一方だけを真面目に解く。

$$F(\xi) = \pm\int\sqrt{2\,m\,E - A/\xi}\,d\xi = \pm\sqrt{2\,m\,E}\left\{\sqrt{\xi(\xi-\alpha)} - \frac{\alpha}{2}\log\left[\sqrt{\xi(\xi-\alpha)} + \xi - \alpha/2\right]\right\}$$

但し、$\alpha = \dfrac{A}{2\,m\,E}$ である。

次の関係式がある

$$\int\sqrt{1-a/x}\,dx = x\sqrt{1-a/x} - a/2\log x(1+\sqrt{1-a/x})^2$$

変数変換、$t = \sqrt{1-a/x}$ し、部分分数に分割すると、積分計算は簡単だ。

もう一方の解は、後を睨むと B=0 としておいて良い事がわかるから、

$$G(\eta) = \pm\sqrt{2\,m\,E}\eta$$

B=0 と置くと、α は次式で与えられ、最近接距離と言う意味を持つ。

$$\alpha = \frac{C}{E}$$

F と G の両方に複合が登場するが、自由度としては同符号か、そうでないかという二つの場合を考えると、原理的には全てを尽くしている。両方が同符号で正の場合には、

$$S = \sqrt{2\,m\,E}\left\{\eta + \xi\sqrt{1-\alpha/\xi} - \frac{\alpha}{2}\log\left[\xi\sqrt{1-\alpha/\xi} + \xi - \alpha/2\right]\right\}$$

この式で無限の遠方での振舞をみると、$(\xi \to \infty)$

$$S \propto \eta + \xi - \frac{\alpha}{2}\log(2\xi) = r - \frac{\alpha}{2}\log(r-z)$$

は球面波である。但し、対数の項が登場する分だけ位相が変調されている。

二つの解の符号が異なると、漸近的には平面波が登場する。

$$S \propto \eta - \xi + \frac{\alpha}{2}\log 2\xi \to z + \frac{\alpha}{2}\log(r-z)$$

S=一定の曲線を描いてみると、先に書いた事情が良く分かる。

ところで、F に登場した平方根の中は正又は 0 でなければならないから、以下の立ち入り禁止の領域が設定される。

$$1 - \alpha/\xi < 0$$

この様に標的の後方に放物線状に、古典力学の意味で、立ち入り禁止区域が設定される事情をある種の物理学者は shadowing と呼んでいる。

光学の教科書のはじめの方に、媒質中の速度の比が屈折率になるという事が書かれている。場所に依って、伝播速度が変わると軌道が曲がる。ここで登場した荷電粒子も、標的がつくる電気的なポテンシャルで連続的に速度が変えられ、その結果として軌道が曲がっているという解釈である。

合流型超幾何関数の復習

合流型超幾何方程式とその原点で有限な解 (Kummer の合流型超幾何関数) を簡単にまとめておこう。以下の微分方程式を合流型超幾何微分方程式と呼ぶ。

$$z\frac{d^2F}{dz^2} + (\beta - z)\frac{dF}{dz} - \alpha\,F = 0$$

z=0 の近傍での級数展開を考えると、以下の解を得る。

$$F(\alpha,\,\beta,\,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n)}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{z^n}{n!}$$

この右辺を見ると、任意の z に対して収束するはずだという事が理解出来るだろう。

ところで、絶対値が大きな z に対する漸近形がこの表現では分からないから別の表現 ($1/z$ の冪表現) も欲しい所である。

次の二つがある。

$$W_1(\alpha,\,\beta,\,z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(-z)^{-\alpha}\,G(\alpha,\,1+\alpha-\beta,-z)$$

$$W_2(\alpha,\,\beta,\,z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}e^z z^{\alpha-\beta}G(1-\alpha,\,\beta-\alpha,\,z)$$

ここで、

$$G(\alpha,\,\beta,\,z) = \sum_n \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{n!\,z^n}$$

G の表現を見ると、実質的に n の階乗が 2 回分子に登場し、分母には 1 回しか現れないので、この展開式は漸近展開である事が分かる。

実際に確認出来る事であるが、W_1、 W_2 は独立に、超幾何微分方程式を満足する。従って、$W_1 \pm W_2$ も解となる。

更に、ここに登場した関数の間には、以下の関係がある。

$$F(\alpha,\,\beta,\,z) = W_1(\alpha,\,\beta,\,z) + W_2(\alpha,\,\beta,\,z)$$

F から $W_{1,2}$ への変換を簡単に復習しておこう。F の定義式中の $\Gamma(\alpha+n)\,z^n/\Gamma(\alpha)\,n!$ の部分は $(1-z)^{-\alpha}$ の 2 項展開に対応する。そこで、$\Gamma(\beta+n)$ を書き換えて、n の部分をこの 2 項展開に取り込む工夫をする。$1/\Gamma(\beta+n) = \int e^t\,t^{-\beta-n}/(2\pi\,i)$ この関係式を利用すると、

$$F(\alpha,\beta,z) = \frac{\Gamma(\beta)}{2\pi\,i}\int (1-z/t)^{-\alpha}e^t t^{-\beta}\,dt$$

被積分関数は、$t=0,\ t=z$ に特異点がある。t 平面で実軸に並行に負の無限遠点から出発し原点と $t=z$ の特異点を反時計回りに囲み、また負の無限遠点へ実軸にそって帰る様に積分路を選ぶ。一方の積分では $u=t-z$ と変数変換して特異点を原点に移すと両者は同一の積分路に変換できる。

$$W_1(\alpha,\beta,z) = \frac{\Gamma(\beta)}{2\pi\,i}\int e^t\,t^{-\beta}(1-z/t)^{-\alpha}dt$$

$$W_2(\alpha,\beta,z) = \frac{\Gamma(\beta)}{2\pi\,i}\int e^{z+t}\,t^{-\alpha}(t+z)^{\alpha-\beta}dt$$

最後に、積分表示に使用した手順を逆にたどり、被積分関数を $1/z$ で展開する。

さてここで問題である。出発点は、原点で正則という条件を満足する、一つの独立解 $F(\alpha,\beta,z)$ であった。ところがこの一つの独立解を変形していると二つの独立解 $W_1(\alpha,\beta,z)$ と $W_2(\alpha,\beta,z)$ が登場してしまった。これは不思議ではないか？どこにからくりがあり、どのようなコストを支払っているか考えてみよ。登場してしまった。

放物座標でシュレーディンガー方程式を解く

Schrödinger eq. は以下の通りとする。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+\frac{C}{r}\right)\psi=E\psi$$

ここで、クーロン力の結合の強さは $C=\dfrac{Z\,z\,e^2}{4\,\pi\,\epsilon_0}$ とおいた。

この式を放物座標で書く。因みに

$$\xi=\frac{r-z}{2},\qquad \eta=\frac{r+z}{2}$$

を独立変数とする事である。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{\xi+\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right\}+\frac{C}{\xi+\eta}\right]\psi=E\psi$$

回転対称性から、方位角依存性は無視する。Hamilton-Jacobi の方程式を解いた時、遠方で入射平面波を持つような解があった事及び変数分離が可能であった事を思い出して、解を以下の様に書いてみる。

$$\psi(\xi,\,\eta)=\exp\left(i\,k\,z\right)g(\xi)=\exp\left\{i\,k(\eta-\xi)\right\}g(\xi)$$

ここで、波数 k は以下の様に定義される。

$$k^2=\frac{2\mu\,E}{\hbar^2}$$

$g(\xi)$ が満足する微分方程式は、以下の様になる。

$$\xi\,g''(\xi)+(1-2\,i\,k\,\xi)\,g'(\xi)-\frac{2\,\mu\,C}{\hbar^2}g(\xi)=0$$

1 階微分の係数を、合流型の微分方程式に合わせるように、$\zeta=2\,i\,k\,\xi$ と変数変換すると、

$$\left\{\zeta\frac{d^2}{d\zeta^2}+(1-\zeta)\frac{d}{d\zeta}+i\,n\right\}g(\zeta)=0$$

ここで、$n=C/\hbar v$ はクーロンパラメータと呼ばれる。(Sommerfeld parameter と呼ばれる事もある。) この方程式は、合流型に変換されたから、

$$g(\xi)=F(-i\,n,1,2\,i\,k\,\xi)=W_1(-i\,n,1,2\,i\,k\,\xi)+W_2(-i\,n,1,2\,i\,k\,\xi)$$

と表現出来る。最右辺の式は、漸近形を導くのに使用される。

$$W_1(-i\,n,1,2\,i\,k\,\xi)\to\frac{1}{\Gamma(1+i\,n)}e^{\pi\,n/2+i\,n\ln(2\,k\,\xi)}\{1+\frac{i\,n^2}{2\,k\xi}+O(\xi^{-2})\}$$

$$W_2(-i\,n,1,2\,i\,k\,\xi)\to\frac{-i}{\Gamma(-i\,n)}\,e^{\pi\,n/2}\frac{1}{2\,k\,\xi}e^{2\,i\,k\,\xi-i\,n\,\ln(2\,k\,\xi)}+O(\xi^{-2})$$

W_2 の分母に於いて、次の Γ 関数の関係式を使用する。

$$(-i\,n)\Gamma(-i\,n) = \Gamma(1-i\,n) = \Gamma(1+i\,n)\,e^{-2\,i\,\sigma_0}$$

その結果、

$$W_1 + W_2 \to \frac{e^{\pi\,n/2}}{\Gamma(1+i\,n)}\left[e^{i\,n\,\ln 2\,k\,\xi}\left(1+\frac{i\,n^2}{2\,k\,\xi}\right) - \frac{n}{2\,k\,\xi}e^{2\,i\,k\,\xi - i\,n\,\ln 2\,k\,\xi + 2\,i\,\sigma_0}\right]$$

この式に $e^{i\,k\,z}$ を掛けて、ψ の漸近形にすると、

$$\Gamma(1+i\,n)e^{-\pi\,n/2}\,\psi \to \{I\ +\ \frac{S}{r}f(\theta)\}$$

ここで、入射波は

$$I = e^{i\,k\,z + i\,n\,\ln k(r-z)}\left\{1+\frac{i\,n^2}{k(r-z)}\right\}$$

散乱波は、

$$S = e^{i\,k\,r - i\,n\,\ln kr}$$

入射波 I と散乱波 S の漸近形と、先に与えた Hamilton-Jacobi 形式での対応する波面の式を比較してみよ。

散乱振幅は

$$f(\theta) = -\frac{n}{k(1-\cos\theta)}e^{-i\,n\,\ln(1-\cos\theta)+2\,i\sigma_0}$$

ここで、$r - z = r(1-\cos\theta)$ と書いた。この結果、微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{n^2}{4\,k^2\,\sin^4\theta/2}$$

と表され、

$$\frac{n^2}{4\,k^2} = \left(\frac{1}{4\,E}\frac{Z\,z\,e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2$$

と書き換えると、古典論の微分断面積の式に一致する。

実際の原子核は点電荷ではないから、ここに与えたクーロン散乱の公式がそのまま成立する訳ではない。

原子核の表面付近でのクーロンポテンシャルの高さをクーロン障壁と呼ぶ場合がある。入射粒子の運動エネルギーがクーロン障壁よりも小さければ、原子核の内部まで入射粒子が入る確率は小さいので、ポテンシャルが点電荷のポテンシャルからどれだけずれているかは、判定が付きにくい。

この様な条件下でも 0 . 数%の精度を問題とすると、真空偏極の効果が顔を出す。

極座標で見たクーロン波動関数

原子核の様な孤立系では、角運動量が良い量子数となるので、角運動量表示のクーロン波動

関数が必要となる。そこで、Schrödinger eq. の解を角運動量が明示的に登場する様に、球面調和関数で展開しよう。

$$\psi_{\ell,\,m} = R_\ell(r) Y_{\ell,\,m}(\theta,\phi)$$

回転対称性を仮定すると、球面調和関数は Legendre 関数で置き換えて議論しても同じ結果になる。動径部分は以下の微分方程式を満足する。

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,R_\ell}{dr}\right) + \left\{k^2 - \frac{2\,n\,k}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right\} R_\ell = 0$$

無次元化するために、独立変数を $\rho = k\,r$ に変数変換し、k^2 の項と遠心力の項 $\ell(\ell+1)/r^2$ を消す為に次の変換をする。

$$R_\ell = \rho^\ell e^{i\,\rho}\, f_\ell(\rho)$$

これにより、$f_\ell(\rho)$ は以下の微分方程式を満足する。

$$\rho\frac{d^2 f_\ell}{d\rho^2} + 2(\ell+1+i\,\rho)\frac{d\,f_\ell}{d\rho} + \{2\,i\,(\ell+1) - n\} f_\ell(\rho) = 0$$

ここでも、１階微分の係数 $2\,i\,\rho$ を $-z$ となるように $z = -2\,i\,\rho$ と変数変換すると、

$$z\frac{d^2\,f_\ell}{d\,z^2} + (2\ell+2-z)\frac{d\,f_\ell}{dz} - (\ell+1+i\,n)\,f_\ell(z) = 0$$

この方程式の、原点で正則な解は合流型超幾何関数であるから、

$$f_\ell(\rho) = F(\ell+1+i\,n, 2\ell+2, -2\,i\,\rho)$$

または r で書くと

$$R_\ell(r) = C_\ell\,(k\,r)^\ell\, e^{i\,k\,r} F(\ell+1+i\,n,\, 2\ell+2,\, -2\,i\,k\,r)$$

規格化定数 C_ℓ は、クーロン力が弱くなった極限 $n \to 0$ で、この解が球ベッセル関数や球ノイマン関数となるように選ぶ。ここでも先に与えた W_1 や W_2 の漸近形を利用する。その結果、

$$R_\ell(r) \to C_\ell \frac{(2\ell+1)!}{|\Gamma(\ell+1+i\,n)|}\frac{e^{\pi\,n/2}}{2^\ell}\,\frac{1}{\rho}\sin\left(\rho - \,n\ln(2\rho) - \frac{\ell\,\pi}{2} + \sigma_\ell\right)$$

ここで、次のΓ 関数の位相が導入された。

$$\Gamma(\ell+1-i\,n) = \Gamma(\ell+1+i\,n)\,e^{-2\,i\,\sigma_\ell}$$

上の R の式で、右辺の $1/\rho$ よりも左の因子は全体として 1 となるように規格化因子を選択する。即ち、

$$C_\ell = \frac{2^\ell}{(2\ell+1)!}|\Gamma(\ell+1+i\,n)|\,e^{-\pi\,n/2}$$

こうとった時の解を特に $F_\ell(\rho)$ と書く。

$$F_\ell(\rho) = C_\ell\, \rho^{\ell+1}\, e^{i\rho}\, \{W_1(\ell+1+i\,n, 2\ell+2, -2i\rho) + W_2(\ell+1+i\,n, 2\ell+2, -2i\rho)\}$$

もう一つの独立解は、上の中括弧の中の W_2 の前に負号を導入すれば良い。W_1 も W_2 も独立に合流型超幾何微分方程式を満足するからである。但し、このままでは純虚数となるので、i を更に掛けておく。

$$G_\ell(\rho) = iC_\ell\, \rho^{\ell+1}\, e^{i\rho}\, \{W_1(\ell+1+i\,n, 2\ell+2, -2i\rho) - W_2(\ell+1+i\,n, 2\ell+2, -2i\rho)\}$$

この関数は $\cos(\rho - n\ln 2\rho - \ell\pi/2 + \sigma_\ell)$ という漸近形を持つ。この漸近形は球ノイマン関数のそれとは因子 ρ 及び負号の分だけ異なる。因みに、ここで定義された二つの関数 $F_\ell,\ G_\ell$ はクーロン波動関数と呼ばれ、２０世紀に定義された特殊関数である。

これで、定在波の独立解が作られた。進行波の解は以下の様に書かれる。

$$I_\ell(\rho) = G_\ell(\rho) - i\,F_\ell(\rho), \quad O_\ell(\rho) = G_\ell(\rho) + i\,F_\ell(\rho)$$

$I_\ell\,(O_\ell)$ と書いた方が $\mathrm{incomming(outgoing)\ wave}$ である。

このようにして導入されたクーロン波動関数を重ね合わせて、全波動関数を作り上げ、放物座標で解かれた解と同じ物理的 (実験条件と整合した) 波動関数と比較するという作業が残っている。

全波動関数 Ψ を $\psi_{\ell,m}$ で展開した時の展開係数を決める。簡単の為に、入射ビームの進行方向を z 軸に選び、球面調和関数のかわりにルジャンドル関数を用いて書く。

$$\Psi(r\ \theta) = \frac{1}{k\,r}\sum_\ell a_\ell\, F_\ell(k\,r) P_\ell(\cos\theta)$$

問題の回転対称性を仮定すると、方位角依存性は無いから m 依存性が露わに登場しない様に式を書いておく方が、単純で見通しが良い。

a_ℓ をきめる指導原理は、クーロンパラメータ n が 0 の極限で通常の平面波に移行する事である。そこで、両者の漸近形をもう一度比較しておく。

$$\exp\,(i\,k\,r\,\cos\theta) \to \frac{1}{k\,r}\sum_\ell (2\,\ell\ +\ 1) i^\ell\ \sin\,(k\,r - \frac{\ell\,\pi}{2})\, P_\ell(\cos\theta)$$

$$\Psi(r,\,\theta) \to \frac{1}{k\,r}\sum_\ell a_\ell \sin\,(k\,r - \frac{\ell\,\pi}{2} - n\ln(2\,k\,r) + \sigma_\ell)\, P_\ell(\cos\theta)$$

入射波部分で位相を揃えておこうとすると、以下の様に a_ℓ をとれば良い。

$$a_\ell = (2\,\ell\ +\ 1) i^\ell\ \exp i(\sigma_\ell - n\ln(2\,k\,r))$$

この位相の中の対数部分は ℓ に依存しないので除いておくと、

$$\Psi(r,\,\theta) = \frac{1}{k\,r}\sum_{\ell}(2\,\ell\,+\,1)i^{\ell}\,e^{i\,\ell}F_{\ell}(k\,r)\,P_{\ell}(\cos\theta)$$

としておく。

最後にこの ℓ についての和をとると、放物座標での解に一致する事を確認する必要があるが、面倒だから止めておく。例えば、Mott と Massey 著 Theory of Atomic collision , 高柳達 (?) の日本語訳も出版されている。又は、笹川著 散乱理論 (裳華房) にも詳しく記述されている。前者では露わに和を取り、後者では、放物座標の解を展開している。合流型の超幾何関数の積分表示から出発し、ベータ関数の積分表示、ベッセル関数の積分表示等を経由する。

次にクーロン散乱の散乱振幅の near/far 分解の話題を Fuller の論文から紹介しておこう。 (Phys. Lett. 57B(1975) 217)

第 2 種のルジャンドル関数 Q_{ℓ} の積分表示は次式とする。

$$Q_{\ell}(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{z-t}\,P_{\ell}(t)dt$$

一方、実軸 $-1 \le z \le 1$ のカットの上下での Q_{ℓ} の値でルジャンドル関数を表すと、

$$Q_{\ell}(x) = \frac{1}{2}[Q_{\ell}(x+i\,\epsilon) + Q_{\ell}(x-i\,\epsilon)]$$

$$P_{\ell}(x) = \frac{i}{\pi}[Q_{\ell}(x+i\,\epsilon) - Q_{\ell}(x-i\,\epsilon)]$$

進行波の解は、

$$Q_{\ell}^{\pm}(x) \equiv \frac{1}{2}[P_{\ell}(x) \mp \frac{2\,i}{\pi}\,Q_{\ell}(x)] = \mp\frac{i}{\pi}Q_{\ell}(x \mp i\,\epsilon)$$

で表現すれば良かった。ここで、$+$ は far side, $-$ は near side amplitude に関係する。

散乱振幅 $f(\theta)$ は一般にルジャンドル関数で展開できていたとする。

$$f(x) = \sum_{\ell} f_{\ell}P_{\ell}(x)$$

この式で、P_{ℓ} を $Q_{\ell}(x \pm i\,\epsilon)$ で書き、次に $Q_{\ell}(x \pm i\,\epsilon)$ に対しては積分表示の式を代入する。最後に被積分関数の中に登場した $P_{\ell}(t \pm i\,\epsilon)$ の部分は、和と積分の順序を交換して、和を取ってしまい、$f(x \pm i\,\epsilon)$ で置き換える。

$$f(x) = \frac{i}{\pi}\{F_N(x+i\,\epsilon) - F_F(x-i\,\epsilon)\}$$

ここで、

$$f_{NorF}(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{z-t}f(t)dt$$

クーロン散乱の散乱振幅は ℓ で和を取る時に、収束が遅いので特別の工夫をしているわけである。さて、これまでは一般論であった 散乱振幅の部分にクーロン散乱の散乱振幅を代入する。もう一度クーロン散乱の散乱振幅の式を書いておくと、

$$f_R(\theta) = -\frac{n}{2\,k\,\sin^2\theta/2}\exp\left(2\,i\sigma_0 - i\,n\,\ln\sin^2\theta/2\right) = f_R(\pi)\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-1-i\,n}$$

ここで、$x = \cos\theta$ とおいてある。先に定義された積分表示の式に代入し積分を実行すると、

$$\begin{aligned} f_Q(z) &= \frac{f_R(\pi)}{2}\frac{2}{z+1}\int_0^1 dv\left(1-\frac{2\,v}{z+1}\right)^{-1}(1-v)^{-1-i\,n} \\ &= \frac{f_R(\pi)}{2}\left[-\frac{1}{1+i\,n}\,F(1,\,1+i\,n,\,2+i\,n;(1-z)/2)\right) \\ &\qquad +\frac{i\,\pi}{\sinh(\pi\,n)}(z-1)^{-1-i\,n}\Bigg] \end{aligned}$$

最後の式に登場した F はガウスの超幾何級数である。露わに書くと、

$$f_{R,N}(\theta)/f_R(\theta) = \frac{1}{1-e^{-2\pi\,n}} - \frac{i}{2\pi}[\sin^2\theta/2]^{1+i\,n}S(\theta)$$

$$f_{R,F}(\theta)/f_R(\theta) = 1 - f_{R,N}(\theta)/f_R(\theta)$$

ここで、

$$S(\theta) = \frac{1}{1+i\,n}F(1,\,1+i\,n,\,2+i\,n\,;\sin^2\theta/2)$$

最後の式は、「 関数の対数微分で表現する場合もある。

式を追っている内に忘れたかも知れないが、ここでは放物座標の独立変数と区別する為に、クーロンパラメータを n で表している事をもう一度思い起こしておいて貰いたい。

κ という量子数に付いて

前提：一つの電子が中心力場に置かれた様な場合を想定し、全角運動量 j が良い量子数である様な状態を考えている。

角運動量の足し算と Clebsch-Gordan 係数は既知とする。

電子の軌道角運動量と固有スピン演算子をそれぞれ、$\boldsymbol{\ell}$、s と書き、その和を j と書く ($\mathbf{j}$=$\boldsymbol{\ell}$+$\mathbf{s}$)。j^2 とその z 成分を対角化する表示を $|j,m>$ とすると、次式が成立する。

$$j^2|j,m>= j(j+1)|j,m>\,,\quad j_z|j,m>= m|j,m>$$

この時、$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell}+1)$ という演算子を考える。勿論、$\boldsymbol{\sigma} = 2\,\mathrm{s}$ である。この演算子の固有値を $-\kappa$ と書く。

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell}+1)|j,m>= -\kappa|j,m>$$

一方、以下の関係式が成立するから、

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell}+1=\mathbf{j}^2-\ell^2-\mathbf{s}^2+1=(j+1/2)^2-\ell(\ell+1)$$

$$\kappa=\begin{cases}\ell & for\ \ j=\ell-1/2\\ -(\ell+1) & for\ \ j=\ell+1/2\end{cases}$$

κ は 0 以外の任意の整数をとる事が分かる。κ の絶対値を k と置くと、j は以下の様に与えられる。

$$j=k-1/2=|\kappa|-1/2$$

更に、κ の符号を S_κ と書くと、軌道角運動量も次式で与えられる。

$$\ell=j+1/2\,S_\kappa=\begin{cases}\kappa & for\ \ \kappa>0\\ -(\kappa+1) & for\ \ \kappa<0\end{cases}$$

これらの関係式を知ると、κ 一つで j と ℓ を与える事が分かる。具体的に表にしてみると、以下の様になる。

κ	-3	-2	-1	0	1	2	3
ℓ	2	1	0	-	1	2	3
j	$5/2$	$3/2$	$1/2$	-	$1/2$	$3/2$	$5/2$
記号	$d_{5/2}$	$p_{3/2}$	$s_{1/2}$	-	$p_{1/2}$	$d_{3/2}$	$f_{5/2}$
$\bar{\ell}$	3	2	1	-	0	1	2

ここで、$\bar{\ell}$ は後で登場する記号であり、以下の様に定義される。

$$\bar{\ell}=\begin{cases}\kappa-1 & for\ \ \kappa>0\\ -\kappa & for\ \ \kappa<0\end{cases}$$

上で書いた $|j,\mu>$ の事を以下の記号を用いて書く。

$$|j,\mu>=\sum_m<\ell\,\mu-m\ 1/2\,m|j\ \mu>Y_{\ell,\mu-m}(\hat{r})\chi^{\pm m}\equiv\chi^\mu_\kappa$$

最後の式では、j、ℓ を書かずに κ を用いている。

以下の関係式を後で使用する。

$$\hat{r}\cdot\sigma\,\chi^\mu_\kappa=\sigma_r\,\chi^\mu_\kappa=-\chi^\mu_{-\kappa}$$

即ち、角運動量の固有状態に固有スピンの r 成分を作用させると、スピン・軌道波動関数の符号及び、κ の符号が変化する。

作用する演算子がスカラー演算子であるから、j 及び μ は変化しない。従って、$|\kappa|$ は変化しない。演算し $\hat{r}\cdot\sigma$ はパリティーを変えるので、κ の符号が変化する。更に、演算子の大きさが 1 であるから絶対値も変化

しない。符号の自由度のみが考察の対象になる。具体的な数値を代入して両辺を比較するのが安直な導き方だろう。

Dirac 方程式の平面波解と角運動量展開

エネルギー固有値が W の場合の、自由空間での Dirac 方程式は次式とする。

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\vec{\mathbf{p}}+\beta)\psi = W\psi$$

$\boldsymbol{\alpha}$, β に対して具体的な表現が欲しい時には、以下の式を使う。

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、$\boldsymbol{\sigma}$ と 1 は 2 行 2 列の行列であり、前者は Pauli のスピンマトリックスと呼ばれる。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

運動量演算子 $\vec{\mathbf{p}}$ の固有値を $\mathbf{p}$ と書くと、

$$\vec{\mathbf{p}}\psi = \mathbf{p}\psi$$

この解を平面波と 4 成分ベクトル $U(\mathbf{p})$ の積だとすると、

$$\psi = U(\mathbf{p})\exp\left[i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} - W\,t)\right]$$

更に、U を上成分 u と下成分 v に分けて書くと

$$U(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

大文字の U は 4 成分のベクトルであり、このベクトルで表される空間を Dirac 空間、 2 成分ベクトル u と v で書かれる空間を Pauli 空間と呼ぶ。$\boldsymbol{\alpha}$ と β に具体的な表現を代入し、運動量演算子をその固有値で置き換えると、u, v は以下の関係式を満足する。

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,u = (W+1)\,v, \quad \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,v = (W-1)\,u$$

この式から、u または v を消去するが、その時次の関係式を利用する。

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

但し、ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ との交換可能性を仮定している。

この式の導き方は以下の通りである。スピン演算子の交換関係は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\sigma} = i\,\boldsymbol{\sigma}, \quad \sigma_j\,\sigma_k = \delta_{j,\,k} + i\,\epsilon_{j,\,k,\,\ell}\sigma_\ell$$

ここで、$\epsilon_{j,\,k,\,\ell}$ は足の内の等しいものが登場すると 0、全てが異なっていて、x、y、z の偶置換ならば 1、奇置換ならば $-$ 1 という値をとる。

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B})=\sum_{j,\,k}\sigma_j\,A_j\sigma_k\,B_k=\sum_j A_j\,B_j+\sum_{j\neq k}\sigma_j\,\sigma_k A_j\,B_k=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

当然の事であるが、完全反対称テンソル $\epsilon_{j,\,k,\,\ell}$ を用いてのベクトル積の成分の表現法を知っている事が仮定されている。

故に、$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2=p^2$ という式が成立する。従って、

$$p^2\,u=(W^2-1)\,u,\quad p^2\,v=(W^2-1)\,v$$

この関係式は線形であるから、自明でない解を持つためには、次の関係式が成立しなければならない。

$$W=\pm\sqrt{p^2+1}$$

ここで、p は運動量の大きさであり 4 個の解のうち 2 個ずつが縮退している。

Pauli 空間でのスピン波動関数を $\chi^{1/2}$ と書くと、(z 成分を指定する自由度は眠らせておいて) 正の W に対する U は以下の様に書ける。

$$U(\mathbf{p})=\sqrt{\frac{W+1}{2\,W}}\begin{pmatrix}\chi^{1/2}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{W+1}\chi^{1/2}\end{pmatrix}$$

この U は $\psi^*\psi=1$、即ち単位体積当たり 1 個という規格化になっている事は、簡単に確認出来るだろう。

まとめると平面波解は、次式で与えられる。

$$\psi=\sqrt{\frac{W+1}{2\,W}}\begin{pmatrix}\chi^{1/2}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{W+1}\chi^{1/2}\end{pmatrix}\exp\left[i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}-W\,t)\right]$$

負のエネルギーに対する解は、u と v がひっくり返る。

次に、球面波解との関係を与えたい。ψ の内の指数関数部分に注目し、3 次元空間での平面波と球面波との関係式を思い出そう。

$$\exp i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})=4\pi\sum_{\ell,\,m}i^\ell\,j_\ell(p\,r)Y_{\ell,\,m}(\hat{\mathbf{p}})^*Y_{\ell,\,m}(\hat{\mathbf{r}})$$

この式の両辺に Pauli 空間でのスピン波動関数 $\chi^{1/2}$ を掛けると

$$\exp i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\chi_\mu^{1/2}=4\pi\sum_{\ell,\,m}i^\ell j_\ell<\ell,\,m-\mu 1/2,\,\mu|j,\,m>Y_{\ell,\,m-\mu}(\hat{\mathbf{p}})^*\chi_\kappa^\mu$$

この関係式を上で書き下した ψ の式に代入する。

次に、ψ の下成分、$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,j_\ell\chi_\kappa$ の部分を書き換える必要がある。
先ず演算子の部分を次の様に書き換えよう。

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} = -i\,\sigma_r\left\{\frac{d}{dr} - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell}}{r}\right\}$$

導き方は次の通りである。先ず、任意のベクトル $\mathbf{p}$ を、任意に与えた 単位ベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ に平行な成分とこれに直交する成分に分割する以下の関係式を思い出す。

$$\mathbf{p} = \hat{r}\,p_r - \hat{\mathbf{r}}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p})/r = -i\,\hat{\mathbf{r}}\frac{d}{dr} - (\hat{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\ell})/r$$

勿論 $\mathbf{p} = -i\,\nabla$ であるから、$p_r = -i\,d/dr$ であり、$\mathbf{r}\times\mathbf{p} = \boldsymbol{\ell}$ と軌道角運動量演算子で置き換えた。
$\mathbf{p}$ に $\boldsymbol{\sigma}$ を掛ける前に、次の関係式に注意する。

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell}) = \hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\ell} + i\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\ell}) = i\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\ell})$$

$\mathbf{r}$ と $\boldsymbol{\ell}$ はいつも直交しているからである。この関係式は次の様に書き換えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\ell}) = -i\,\sigma_r(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell})$$

まとめると、

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} = -i\,\sigma_r\left\{\frac{d}{dr} - \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell}+1)\,-1}{r}\right\}$$

上で示した手法を使うと、

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,j_\ell(p\,r)\chi^\mu_\kappa = -i\sigma_r\left\{p\,j'_\ell(pr) + \frac{\kappa+1}{r}\,j_\ell\right\}\chi^\mu_\kappa = i\,p\,S_\kappa\,j_{\bar{\ell}}(p\,r)\chi^\mu_{-\kappa}$$

とまとめられる。
但し、κ の正・負に応じ、球ベッセル関数の微分に関する次の関係式を使用している。

$$j'_\ell(x) = \frac{\ell}{x} - j_{\ell+1} = j_{\ell-1} - \frac{\ell+1}{x}j_\ell$$

更に、$\sigma_r\,\chi^\mu_\kappa = -\chi^\mu_\kappa$ も使用している。旨くまとめる人もいるもんだ！
最後に

$$\psi = 4\,\pi\sqrt{\frac{W+1}{2W}}\exp(-iWt)\sum i^\ell < \ell,\,\mu{-}m\;1/2,\,m\,|j,\,\mu > \,Y_\ell^{\mu-m*}(\hat{\mathbf{p}})\begin{pmatrix} j_\ell\,\chi^\mu_\kappa \\ \dfrac{i\,p}{W+1}S_\kappa j_{\bar{\ell}}\,\chi^\mu_{-\kappa}\end{pmatrix}$$

これで、$\psi^*\psi = 1$ という規格化された平面波を球面波で展開できた。

一方、クーロン散乱に対して j が良い量子数の解で、電荷を 0 とした極限での解は、異なる規格化がなされている。

$$\chi^\mu_\kappa(0) \equiv \sqrt{\frac{p\,(W+1)}{\pi}}\begin{pmatrix} j_\ell\,\chi^\mu_\kappa \\ \dfrac{i\,p}{W+1}S_\kappa j_{\bar{\ell}}\,\chi^\mu_{-\kappa}\end{pmatrix}$$

この定義式を用いて ψ を表すと、

$$\psi = 4\,\pi\sqrt{\frac{\pi}{2\,p\,W}}\,e^{-i\,W\,t}\sum i^{\ell} < \ell,\,\mu - m\;1/2,\,m|j,\,\mu > \,Y_{\ell}^{\mu-m*}\chi_{\kappa}^{\mu}(0)$$

この表現では、$x\,j_{\ell}(x) \rightarrow \cos(x - (\ell+1)\pi/2)$ と書くと遠心力による位相のずれは $\delta_{\kappa}(0) = -(\ell+1)\pi/2$ である。

点電荷による相対論的電子散乱

ここでは、次の Dirac 方程式を散乱条件下で解く事を目的とする。

$$H\psi = \{\boldsymbol{\alpha}\cdot\vec{\mathbf{p}} + \beta + V\}\psi = W\,\phi$$

ここで、自然単位系 $(\hbar = c = m = 1)$ を仮定し、V は通常の原子核と電子のクーロンポテンシャルである。α とβ は先に与えた様な Dirac 空間 (4 次元) での行列である。W はエネルギー固有値であり、静止質量 1 を含む。運動量演算子は $\vec{\mathbf{p}} = -i\nabla$ である。この方程式を極座標で解く。先ず、微分演算子の極座標表現を書き下す。

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla) - \hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\nabla) = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} - i(\hat{\mathbf{r}}\times\ell)/r$$

この式は、任意のベクトルを単位ベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ に平行な成分とこれに垂直な成分に分ける時に使用される。当然 $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ である。ハミルトニアンの運動エネルギー部分は、以下の様に変形する。

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\vec{\mathbf{p}} = -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla = -i\alpha_r\frac{\partial}{\partial r} - \boldsymbol{\alpha}\cdot(\hat{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\ell}) = i\gamma_5\sigma_r\frac{\partial}{\partial r} - i\gamma_5\sigma_r\,\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

次の様な式変形の結果、上の様に変形される。

$$(\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\ell} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\ell} = -i\gamma_5\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\ell}$$

$\mathbf{r}$ と $\boldsymbol{\ell}$ は直交しているから、中の式の第 1 項は 0 である。

$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ は Dirac 空間にスピン演算子を拡張したものになっている。

$\boldsymbol{\alpha} = -\gamma_5\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\sigma}\gamma_5$ であり、$\alpha_r = \hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\alpha} = -\gamma_5\sigma_r$ と書ける。

この結果、解くべき方程式は以下の様に書ける。

$$H\psi = \left\{i\gamma_5\sigma_r(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r}\beta\,K) + V + \beta\right\}\psi = W\psi$$

但し、

$$K \equiv \beta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell} + 1)$$

$\mathbf{j}^2$ や j_z は K と可換であり、$V(r)$ と $\boldsymbol{\ell}$ は可換だから $V(r)$ と K も可換である。今後、$\mathbf{j}^2$ と j_z の固有値を $j(j+1),\ \mu$ と書き、この状態を取り上げる。更に、ψ を上成分と下成分に分けて書く。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^u \\ \psi^l \end{pmatrix}$$

上成分と下成分は、非相対論の極限では large component, small component と呼ばれる事もある。K をこれらの成分に作用させると、上 (下) 成分に対しては β =1(−1) とすればよいから、$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell}+1)\psi^u = -\kappa\psi^u$ であり、下成分に対しては、$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell}+1)\psi^l = +\kappa\psi^l$ である。

ψ を角運動量の固有状態 $\chi_{\kappa,\mu}$ で展開する。

$$\psi = \psi_{\kappa,\mu} = \begin{pmatrix} g(r)\chi_{\kappa,\mu} \\ i\,f(r)\chi_{-\kappa,\mu} \end{pmatrix}$$

上成分と下成分とでは、今までの常識的な意味ではパリティーが異なるので、一方が κ という足を持てば、他方は $-\kappa$ という足を持つ。下成分の動径部分は、$f(r)$ が実数になるようにあらかじめ虚数単位がついている。この ψ を上の Dirac 方程式に代入し、$\sigma_r\,\chi_{\kappa,\mu} = -\chi_{\kappa,\mu}$ 及び $\chi_{\kappa,\mu}$ は直交基底である事を使用すると、次の連立 1 次方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d\,f}{dr} &= \frac{1}{r}(\kappa-1)f - (W-1-V)g \\ \frac{d\,g}{dr} &= (W-V+1)f - \frac{1}{r}(\kappa+1)g \end{aligned}$$

Schödinger 方程式を解いた時の様に $1/r$ を外へ出して, $g(r) = u_1(r)/r,\quad f(r) = u_2(r)/r$ と書くと、

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa/r & (W+1-V) \\ -(W-1-V) & \kappa/r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

この方程式の解は $V(r)=0$ ならば、先に書き下した平面波の角運動量展開解、即ち、球ベッセル関数になる。勿論ポテンシャルは、$V(r) = -Z\,e^2/4\pi\epsilon_0 r = -C/r$ である。ここでは電子と原子核を想定しているので、負号を露わに書いてある。

Schrödinger 方程式は、2 階の微分方程式であったが、Dirac 方程式は連立 1 階方程式である。Schrödinger 方程式と同じ形に持ち込むために、u_2 を消去して 2 階の微分方程式を作る。この時、ポテンシャルの微分が登場する。即ち r^{-2} の項はクーロンポテンシャルの微分と遠心力ポテンシャルから登場する。従って、クーロン力と遠心力が混じってしまう。この結果、束縛状態では $2s_{1/2}$ 状態と $2p_{1/2}$ 状態が縮退する。この縮退は真空偏極の効果を考慮すると解け、Lamb と Retherford に依って実際に縮退が解けている事が確認された。

ここまでは、束縛状態であるか散乱状態であるかの区別はなかったが、これからは散乱状態を想定して式変形がなされる。Schrödinger 方程式を解く時には、$F_\ell,\ G_\ell$ という実数解 (定在波の解) に持ち込んでも良かったし $G_\ell \pm iF_\ell$ という進行波解に持ち込んでも良かっ

た。同じ事情は、この場合にもある。そこで次の様に書いてみよう。

$$u_1 = \sqrt{W+1}(\Phi_1 + \Phi_2), \quad u_2 = i\sqrt{W-1}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

更に独立変数を無次元にしておく。

$$p \equiv \sqrt{W^2-1}, \quad x \equiv 2\,i\,p\,r$$

p は、非相対論の場合の波数 k に対応し、独立変数は ρ に対応している事が分かるだろう。この結果、

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{iCW}{px}\right) & -\left(\frac{\kappa}{x}-\frac{iC}{px}\right) \\ -\left(\frac{\kappa}{x}+\frac{iC}{px}\right) & -\left(\frac{1}{2}+\frac{iCW}{px}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}$$

この式を良く見ると、Φ_1 と Φ_2 とは複素共役の関係にある事が分かる。即ち Φ_i は進行波であり、u_i は定在波 (実解) である事が分かる。Φ_2 を消去して Φ_1 に関する微分方程式を作ると、

$$\frac{d^2\Phi_1}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\Phi_1}{dx} - \left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2x}+\frac{iCW}{px}\right) + \frac{\gamma^2}{x^2}\right\}\Phi_1 = 0$$

ここで、$\gamma^2 = \kappa^2 - C^2$ とおいた。κ は遠心力、C はクーロン力に起因しているから、γ^2 は拡張された遠心力である。$\Phi_1 = x^\gamma\, e^{-x/2} H(x)$ と置いて、$H(x)$ の微分方程式を作る。こうすると、広義の遠心力の項 γ^2/x^2 と、運動エネルギーの項 $1/4$ が消えるのは、Schrödinger 方程式を解く時の手法と同じである。

$$x\,H''(x) + (2\,\gamma + 1 - x)H'(x) - (\gamma + 1 + i\,y)H(x) = 0$$

但し、$y = CW/p$ はクーロンパラメータ、(先には n と書いた) に対応している。$H(x)$ は合流型超幾何関数で書き下せる。

$$H(x) = F(\gamma + 1 + i\,y,\ 2\gamma + 1,\ x)$$

先に書き下したクーロン波動関数と比較して、変数の対応関係を確認してみると良い。x が $-2\,i\,k\,r$ に対応し、負号は？ と思う学生も居るだろうが、先にはクーロンポテンシャルは $\mathrm{C/r}$ であったが、ここでは $-\mathrm{C/r}$ であるからだと納得できるだろう。ただし、超幾何関数には以下の公式があるので、独立変数の負号は気にする必要はない。

$$e^{-x/2}F(\gamma + 1 + i\,y,\ 2\gamma + 1,\ x) = e^{x/2}F(\gamma - i\,y,\ 2\gamma + 1,\ -x)$$

これで、規格化因子を除いて、方程式は解けた。

$$\Phi_1 = N(\gamma + i\,y)e^{i\eta}(2\,p\,r)^\gamma e^{-i\,p\,r}\,F(\gamma + 1 + i\,y,\ 2\gamma + 1,\ 2\,i\,p\,r)$$

右辺の最初の 3 個の因子が規格化に使用される。但し、3 番目の因子は $\Phi_1^* = \Phi_2$ となるように導入された。

$$e^{2\,i\,\eta} = -\frac{\kappa - i\,y/W}{\gamma + i\,y}$$

を満足する様に決める。こうして得られた解は、以下の通りである。

$$rg = N\sqrt{W+1}(2pr)^\gamma\{(\gamma + i\,y)e^{-ipr+i\eta}F(\gamma+1+iy,\ 2\gamma+1,\ 2ipr) + CC\}$$

$$rf = iN\sqrt{W-1}(2pr)^\gamma\{(\gamma + iy)e^{-ipr+i\eta}F(\gamma+1+iy,\ 2\gamma+1,\ 2ipr) - CC\}$$

ここで、CC は複素共役を表す。

次に、x が大きくなった時の漸近形を調べよう。合流型超幾何関数の $W_1,\ W_2$ の漸近形を思い出せばよい。$F(a,\,b,\,x) \to \Gamma(c)\,x^{a-c}e^x/\Gamma(a)$ を利用すると、

$$rg \to N\sqrt{W+1}\,\Gamma(2\gamma+1)(2pr)^\gamma\left\{\frac{(\gamma+iy)e^{ipr+i\eta}}{\Gamma(\gamma+1+iy)}(2ipr)^{iy-\gamma} + CC\right\}$$

$$rf \to iN\sqrt{W-1}\,\Gamma(2\gamma+1)(2pr)^\gamma\left\{\frac{(\gamma+iy)e^{ipr+i\eta}}{\Gamma(\gamma+1+iy)}(2ipr)^{iy-\gamma} - CC\right\}$$

これらが、以下の様に振舞うとして位相のずれを決める。

$$rg \to \sqrt{\frac{W+1}{\pi\,p}}\cos(pr+\delta), \quad rf \to -\sqrt{\frac{W-1}{\pi\,p}}\sin(pr+\delta)$$

結局位相のずれは、

$$\delta = \delta_\kappa = y\log(2pr) - arg\Gamma(\gamma+iy) + \eta - \gamma\,\pi/2$$

規格化因子も決まるから、最終的な部分波の動径成分解は以下の通りである。

$$rg(r) = \frac{\sqrt{W+1}(2pr)^\gamma e^{\pi\,y/2}|\Gamma(\gamma+iy)|}{2\sqrt{\pi\,p}\Gamma(2\gamma+1)}\left\{e^{-ipr+i\eta}(\gamma+iy)F(\gamma+1+iy,\,2\gamma+1,\,2ipr) + CC\right\}$$

$$rf(r) = \frac{i\sqrt{W-1}(2pr)^\gamma e^{\pi\,y/2}|\Gamma(\gamma+iy)|}{2\sqrt{\pi\,p}\Gamma(2\gamma+1)}\left\{e^{-ipr+i\eta}(\gamma+iy)F(\gamma+1+iy,\,2\gamma+1,\,2ipr) - CC\right\}$$

ここで作られた波動関数は、異なるエネルギーに対してδ 関数となるように選んである。

$$\int \psi^*_{W'}\psi_W\,d^3x = \delta(W-W')$$

ここで得られた波動関数は、光電効果、Compton 散乱、β 崩壊、内部転換等の電子が関与する原子核現象に利用される。例えば、β 崩壊で陽電子崩壊と陰電子崩壊とで電子のエネルギースペクトルが異なる理由の定量的な説明がこれでなされる。(Fermi 関数と呼ばれる)

$r=0$ を代入してみると、$\left|\frac{\text{電子}}{\text{陽電子}}\right|^2 \sim e^{-2\pi\, y}$ となるので、斥力をうける陽電子の方が原点近くでの存在確率が減る。

今の表現では、上成分の位相のずれを計算すると、下成分は確定してしまう事にも注意しておこう。

ここまでで、平面波解とポテンシャルがある時の部分波解が計算できた。つぎになすべき事は、実験条件に一致するように散乱状態を重ねあわせていく事である。先に書き下した平面波解では、電子スピンは m に固定されていた。これが m である振幅を c_m であるとして、もう一度平面波解を思い出す為に書いておこう。(但しエネルギーに関係する e^{-iWt} は落してある。

$$\psi_{pl} = 4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2Wp}}\sum_{\kappa,\,\mu}\sum_{m} c_m i^{\ell} < \ell,\, \mu-m,\, 1/2,\, m\,|j\,\mu > Y_{\ell}^{\mu-m*}(\hat{\mathbf{p}})\chi_{\kappa}^{\mu}(0)$$

$\hat{\mathbf{p}}$ は入射電子の進行方向を示す。この平面波解にクーロン相互作用がある時の解を足し込んで、以下の漸近形になるようにする。

$$\psi \to \psi_{pl} + \frac{b}{r}e^{ipr+iy\log(2pr)}$$

このように書ければ、外向き波の振幅 b が散乱振幅を与える。クーロンポテンシャルがある時の解を以下の様に重ね合わせる。

$$\psi = 4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2Wp}}\sum_{\kappa,\,\mu}\sum_{m} s_\kappa\, c_m i^{\ell} < \ell,\, \mu-m,\, 1/2,\, m\,|j\,\mu > Y_{\ell}^{\mu-m*}(\hat{\mathbf{p}})\psi_{\kappa,\,\mu}$$

この式では部分波展開の係数は $C \to 0$ 即ち、クーロン力が 0 の極限で平面波になるようにきめてあるが、s_κ という自由度が導入してある。$s_\kappa = e^{i\delta_\kappa^{`}}$ と書くと

$$\delta_\kappa^{`} = \eta - arg\Gamma(\gamma+iy) - \gamma\pi/2 + (\ell+1)\pi/2 = \delta_\kappa - \delta_\kappa(0)$$

である。右辺の最初の 3 項はクーロン力がある時の位相のずれから、外向き波成分を示す位相を除いた部分である。最後の 4 項目は、$rg(r)$ の漸近形が $\cos(**)$ として定義された為に登場している。

$(\psi - \psi_{pl}) \to \frac{b}{r}e^{ipr+iy\log(2pr)}$、即ち、右辺の e^{-ipr} の係数が 0 となるように s_κ は決めてある。

b の上成分 $(1+\beta)\,b/2$ はこの s_κ を代入すると、

$$(1+\beta)\,b/2 = -\frac{2\pi\, i}{p}\sqrt{\frac{W+1}{2W}}\sum_{\kappa,\,\mu,\,m} c_m(e^{2i\delta_\kappa^{`}}-1) < \ell\mu - m1/2m|\, j\mu > Y_{\ell,\,\mu-m}^{*}(\hat{\mathbf{p}})\chi_{\kappa,\,\mu}(\hat{\mathbf{p}}')$$

ここで、$\hat{\mathbf{p}}'$ は散乱後の電子の進行方向である。散乱後の電子スピン波動関数を露わに見える様に $\chi_{\kappa,\,\mu}(\hat{\mathbf{p}}') = \sum_\tau < \ell\,\mu-\tau 1/2\tau|j\,\mu > Y_{\ell,\,\mu-\tau}(\hat{\mathbf{p}}')\chi^{\tau}$ と展開する。

さらに入射電子の方向を z 軸に選ぶと、$Y^*_{\ell,\mu-m}(\hat{\mathbf{p}}) = \sqrt{\dfrac{2\ell+1}{4\pi}}\delta_{\mu,m}$ であるから、散乱振幅の式は

$$(1+\beta)b/2 = \sqrt{\frac{W+1}{2W}}\sum_{m,\tau} c_m B^m_\tau \chi^\tau$$

ここで、

$$B^m_\tau = -\frac{i\sqrt{\pi}}{p}\sum_\kappa (e^{2i\delta_\kappa}-1)\sqrt{2\ell+1} < \ell 0\, 1/2\, m|j\, m >< \ell\, m-\tau\, 1/2\tau|j\, m > Y_{\ell,m-\tau}(\hat{\mathbf{p}}')$$

入射電子のスピンの向きが m で、散乱後の電子のスピンの向きが τ となる (散乱振幅のスピン表示) の係数が B^m_τ である。これを行列の形に書くと、

$$A = \begin{pmatrix} B^{1/2}_{1/2} & B^{-1/2} \\ B^{1/2}_{-1/2} & B^{-1/2}_{-1/2} \end{pmatrix} = F + \boldsymbol{\sigma}\cdot\vec{G}$$

2 行 2 列の行列は必ず 1 と Pauli 行列で展開できるから、最右辺の様に書ける。Pauli 行列の露わな表現を用いると、

$$A = \begin{pmatrix} F+G_z & G_x - iG_y \\ G_x + iG_y & F-G_z \end{pmatrix}$$

ところで、$G_z = 0$ である事が、具体的に計算すると導ける。$2\,G_z = B^{1/2}_{1/2} - B^{-1/2}_{-1/2}$ であるが、B の m と τ は Clebsch-Gordan 係数 の中にしか登場しない。$< \ell, 0\, 1/2 1/2|j 1/2 >= (-1)^{\ell+1/2-j} < \ell, 0, 1/2, -1/2|j\ -1/2 >$ であるから、これらの 2 乗の差は 0 である。

次に $(G_x + i\,G_y)/(G_x - i\,G_y)$ の比を決めたい。入射電子の方向を z 軸に取った。散乱後の電子の運動方向の極角と方位角を $\theta,\ \phi$ ととると

$$\frac{G_x + i\,G_y}{G_x - i\,G_y} = \frac{B^{1/2}_{-1/2}}{B^{-1/2}_{1/2}} = e^{-2i\phi}$$

一方、入射電子の進行方向 $\hat{\mathbf{p}}$ と散乱後の電子の進行方向 $\hat{\mathbf{p}}'$ のベクトル積の方向を持つ単位ベクトルを定義する。

$$\hat{\mathbf{n}} \equiv \frac{\hat{\mathbf{p}}\times\hat{\mathbf{p}}'}{|\hat{\mathbf{p}}\times\hat{\mathbf{p}}'|}$$

この定義から、

$$e^{-2i\phi} = \frac{n_x + i\,n_y}{n_x - i\,n_y}$$

が導ける。従って、$\vec{G}$ と $\hat{\mathbf{n}}$ は平行か反平行である。習慣的に、平行と取られる。

$\vec{G}$ が $\hat{\mathbf{n}}$ に必ず平行になるというのは、少し不思議な気もする。即ち入射電子のスピンに依らず、散乱後の電子スピンの向きは $\hat{\mathbf{n}}$ に (反) 平行である。この結論は、スピンが 1 / 2 であり、パリティーが保存すれば必ず成立する事を後で学ぶだろう。

最終的に散乱振幅は以下の様になった。

$$F = -\frac{i}{4\,p}\sum_{\kappa}(e^{2\,i\,\delta_{\kappa}^{'}}-1)(2j+1)P_{\ell}(\cos\theta)$$
$$G = -\frac{1}{2\,p}\sum_{\kappa}S_{\kappa}(e^{2\,i\,\delta_{\kappa}^{'}}-1)(2j+1)P_{\ell}^{1}(\cos\theta)$$

S_{κ} は κ の符号であり、散乱振幅は Legendre 関数とその陪関数で書かれている。

これらの式から、微分断面積や偏極量が計算出来る。

実際には、原子核の電荷分布は点ではない。原子核の近傍や内部では点電荷のポテンシャルとはかなりずれているだろう。内部での電荷分布は以下の様な関数で展開し、充分外では今計算した解に滑らかに繋げば、実際の電荷分布に対する位相のずれが計算出来るだろう。そして、仮定した電荷分布と実験で得られた微分断面積を比較すると仮定した電荷分布がどの程度正しいか判定が出来るだろう。

原子核による電子散乱

運動エネルギーが５００ MeV の電子の de Broglie 波長は約 ０．４ fm であるから、原子核の細部を観測する事が可能だと思われる。但し、電子と原子核の相互作用は主にクーロン力であろうから、電荷分布を観測する事になる。正確を期すならば、位置分解能を決めるのは de Broglie 波長ではなく、運動量移行、即ち 入射電子と散乱電子の運動量の差である事を認識しておくべきだろう。

大きな運動量移行の領域まで、弾性散乱を測定しようとすると、弾性散乱の微分断面積は非常に小さくなる。計数率が宇宙線の到着する頻度よりも小さい場合もあるとすると、放射線遮蔽は非常に厳重に行わねばならない。

弾性散乱された電子と非弾性散乱された電子とを区別する必要がある事も正しく認識しておかねばならないだろう。例えば、原子核の第１励起状態の励起エネルギーが１ MeV だとしよう。大雑把に言って、５００ MeV と４９９ MeV の電子を識別する必要がある。

以下３枚の図は、B.Frois (Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 1987,133) より引用した。

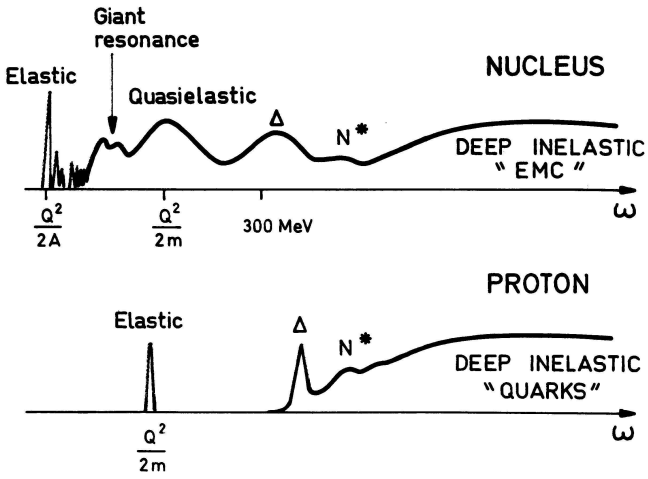


Figure 1 Schematic shape of electron-nucleus and electron-nucleon cross sections as a function of the energy transfer ω.

図は、陽子と原子核を標的とした散乱電子のエネルギースペクトルを図式的に表したものである。一番左のピークが弾性散乱のピークである。

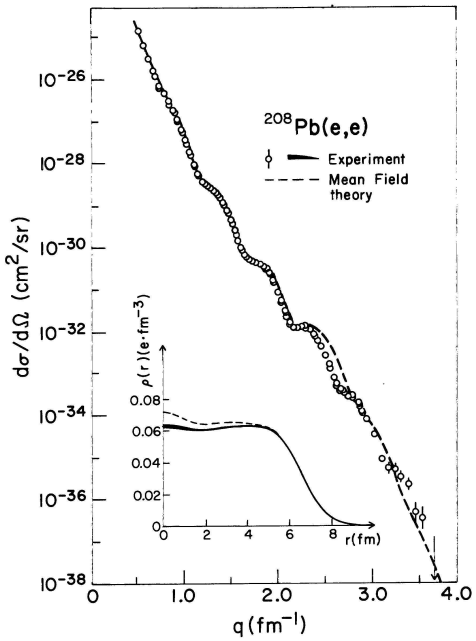


Figure 7 Elastic cross section from ^{208}Pb (47). The dynamic range of the measurements allows the reconstruction of the charge density distribution (*insert*). The thickness of the line in $\rho(r)$ depicts the experimental uncertainty. The mean field result in that of Dechargé & Gogny (53).

図は代表的な電子散乱微分断面積のグラフである。横軸は、散乱角度ではなく、運動量移行を $\hbar$ で割って波数移行で表示してある。内挿された図は、この微分断面積を利用して推定された鉛原子核の電荷分布である。

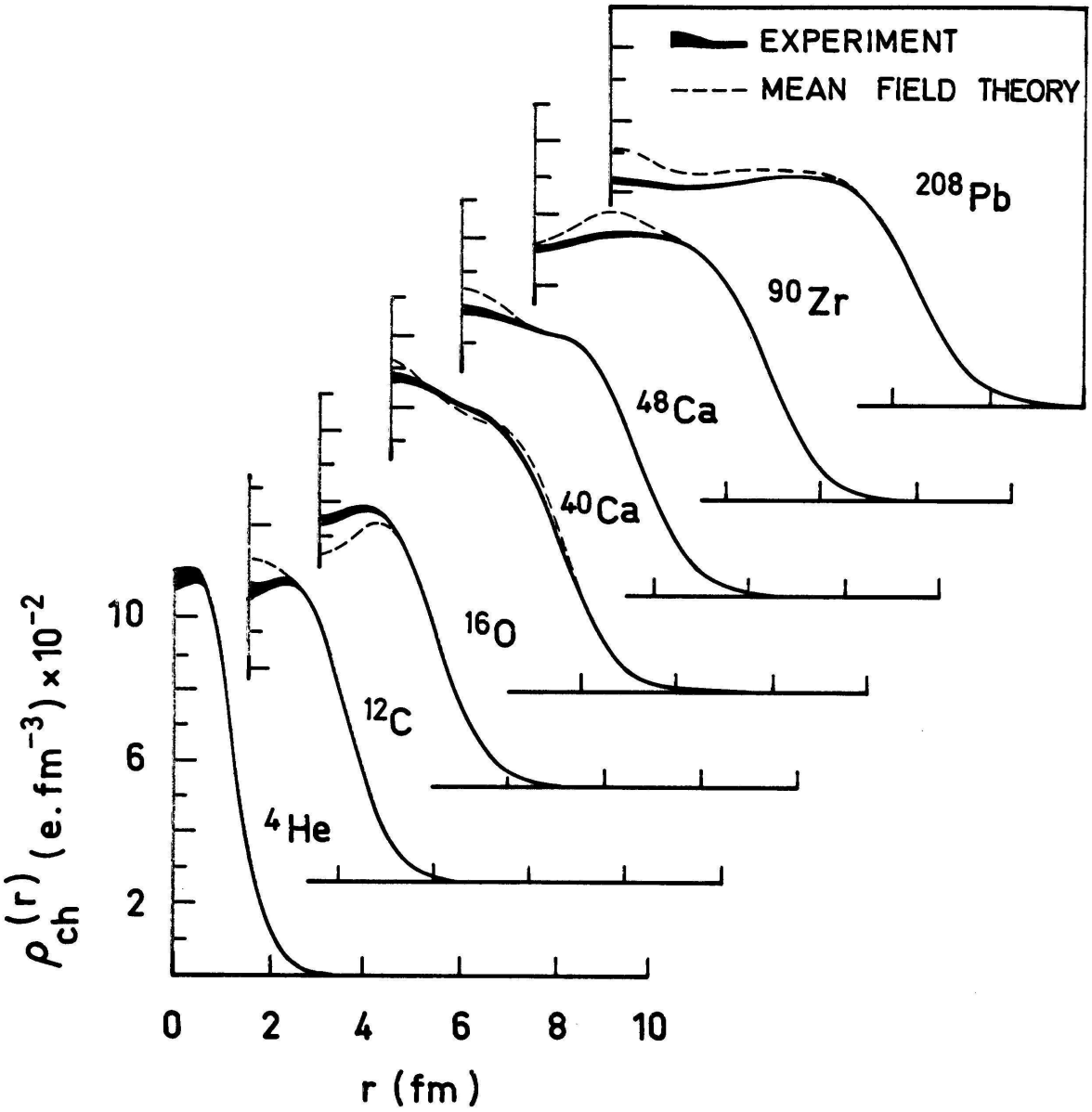


Figure 8 Charge density distributions of doubly closed-shell nuclei. The thickness of the solid line depicts the experimental uncertainty. The mean field calculations are from (53).

図は代表的な原子核に対する電荷分布を示している。破線は平均場近似という原子核模型を用いて推定された電荷分布である。縦軸は、全体積で積分した時に、原子番号 Z になるように規格化されている。従って、中性子の分布はこのグラフには考慮されていない。安定な原子核に於いては、分布関数は陽子と中性子とではほとんど同じであると推定される。もしも分布が異なっていると、原子核がβ 崩壊する確率が発生するだろう。

この様なグラフを下に、原子核の密度は内部ではほぼ一様であり、表面付近が幾らかぼやけていると言われる。

原子核の電荷分布 $\rho(r)$ を以下の関数で展開する場合がある。

$$\rho(r) = \sum_n w_n j_0 \left(\frac{n\, r\, \pi}{R} \right)$$

ここで $j_0(x)$ は 0 次の球ベッセル関数であり、R はこれよりも大きな r では電荷分布が 0 になっていると考えられる半径である。例えば、Atomic and Nuclear Data Tables vol 36(1987) pp 496 に H. de Vries 達がこの展開係数を編纂している。

特に、陽子と重陽子の電荷半径は以下の値が報告されている。$R_p = 0.895(18) fm \quad R_d = 2.130(10) fm$

これらの値は、最新の基礎物理定数の決定にも使用されている。

核力に関連した話

原子核は陽子と中性子の束縛状態であると決めつけて、この仮定の下での話題を提供する。

陽子と中性子

陽子は通常の水素の原子核である。中性子は陽子と束縛状態を作りこれを重陽子と呼ぶ。陽子と中性子を規定するパラメータは、質量・電荷・スピン・半減期・崩壊様式・磁気能率といったところであろうか。理科年表からこれらのパラメータを引用して、表にしてみよう。

項目	陽子	中性子	単位
質量	1.67262158	1.67492716	$[10^{-27} kg]$
電荷	1.0	0.0	[e]
スピン	1/2	1/2	$[\hbar]$
磁気能率	1.410606633	0.96623640	$[10^{-26} J \cdot T^{-1}]$
平均寿命	安定	887.0	[秒]
崩壊様式		$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + e^- + \bar{\nu}$	

こうして見ると無味乾燥な値である。

質量は、エネルギーに換算すると 陽子 (中性子) は 938.27231(939.56563) MeV であり、両者の差は約 1.293 MeV である。質量が大きい中性子の方がβ 崩壊する。

陽子が電荷を有する事は、電場で加速したり、磁場で曲げてみればすぐに分かる。非常に不思議な事に、電子の電荷と陽子の電荷の大きさは実験誤差の範囲で完全に一致している。中性子の電荷は、当面のところ検出限界以下である。電気的に中性であるために、中性子を最初はエネルギーの高いγ 線と誤認した実験家もいたほどである。

中性子の寿命は、基本的な物理量の割りには精度が悪い。万有引力定数 G と精度の悪さを競っている基本定数である。平均寿命 τ と半減期 $T_{1/2}$ とは自然対数を用いて、以下の関係にある。

$$T_{1/2} = \tau\, \log(2)$$

陽子や中性子がスピンを有する事は、核磁気共鳴の実験から結論される。特に Rabi が開発した手法を用いて中性子の磁気能率を精密に測定した Alvarez と Bloch の業績は名前を

挙げるに足ると思う。磁気能率の大きさは核磁子 $(\mu_N = e\hbar/2m_p)$ 単位で言及する場合の方が多い。$\mu_p = +2.79277\mu_N, \quad \mu_n = -1.91304\mu_N$ である。陽子と中性子とでは磁気能率の符号が異なる。

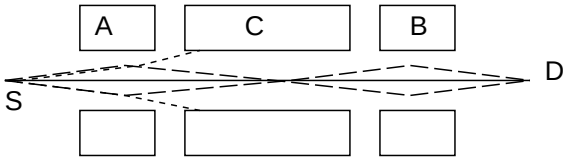
陽子の磁気能率の大きさが Dirac 理論よりも有意に大きい事は、陽子が素粒子では無い事を示唆していると了解される。又、電気的に中性の中性子が磁気能率を有する事は、その後の素粒子模型の発展を導いた。

E.Fermi は陽子と中性子の磁気能率の大きさの差が μ_N 単位でほぼ 1 である事から、中性子はある確率で陽子とπ $^-$ 中間子の束縛状態ではないかと考えた。このアイデアは坂田を触発し、素粒子の坂田模型へと発展した。坂田模型では 3 種の基本粒子と群論による分類とが基礎をなしている。その後、Gell-Mann により 3 種の基本粒子は、全く未知の粒子 (quark) におきかえられた。現在の理論家はほとんどが quark の存在を信じている様だ。しかし何故 quark の電荷と電子の電荷の比がきれいな有理数になるのか？と問われれば返答に窮するだろう。

Rabi の分子線法はこの後で重陽子の電気的 4 重極能率に関しても登場するので、少し解説を加えておこう。磁気能率 $\boldsymbol{\mu}$ を有する電気的に中性な粒子を磁場 $\mathbf{H}$ 中に置く。上に引用した磁気能率の定義と整合させるためには、磁場と言わずに磁束密度と言わねばならないが、習慣に従って磁場としておく。磁気能率と磁場は相互作用し、そのエネルギー E は磁気能率と磁場の相対的な向きに依存し、以下の様に書かれる。

$$E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}$$

方向量子化という事があるからエネルギー的に複数の状態に分裂する。これは Zeeman 効果として知られている。もしも磁場が場所の関数 (磁場勾配が 0 でない) ならば、この中性粒子にはエネルギーの低い方向に重心が運動するような力が作用する。最初中性粒子はある方向にほぼ平行に走っていたとする。磁場勾配があると、運動方向に垂直に力を受ける様に磁場を用意しておく。その磁気能率の向きによりある粒子は発散力を受け、別の粒子は収束力をうける。



図の S から中性粒子が右向きに打ち込まれる。ある磁気能率の向きの粒子は磁場勾配のある磁場 A で収束力を受けて一様磁場 C の中央で焦点を結び、更に進んでもう一度磁場勾配のある磁場 B でも収束力を受けて、検出器 D で検出される。C 磁場の中央部に核磁気共鳴を起こさせる高周波磁場をかけておく。もしもこの高周波磁場の周波数と磁気能率が磁場中で行う歳差運動の周波数 (ラーマー周波数) と一致すると、磁気能率の向きは変化する。もしもスピンが 1 / 2 ならば、磁気能率の向きが逆転する。磁気能率の向きが変わると、A 磁場では収束力を受けた中性粒子は B 磁場では発散力を受け、検出器には到着しない。高

周波磁場の周波数を一定に保っておいて、C 磁場の強度を変えていくと共鳴的に D での検出率が落ちるところがある。この時の磁場と周波数が分かれば磁気能率が計算出来る。

ここでは原子核の有する磁気能率は直接外部磁場と相互作用をすると仮定した。もしも原子核が電気的４重極能率を持ち、原子核の周りを周回する電子が原子核の位置に電場勾配 $\partial^2 V/\partial r^2$ (但し V は電子が原子核の位置につくる静電ポテンシャル) をつくると、共鳴周波数は複雑になる。旨く利用すると、電子の波動関数のチェックにも利用できる。

磁気共鳴の簡単な解説は、３年生の実験学やイオン光学の講義ノートに書いたのでそちらを参照されたい。

重陽子

重陽子は、陽子と中性子の唯一の束縛状態である。その束縛エネルギーは約 2.2246 MeV であり、原子核の平均的な束縛エネルギーである 8 MeV と比較するとかなり小さい。

重陽子のスピンは１ $(\hbar)$ である。

磁気能率は、$\mu_d = 0.857409\mu_N$ であり、電気的４重極能率は $Q = 0.00282\ e \times 10^{-28}\, m^2$ である。

これらの情報に関する注をこれからする事になる。

１) 束縛エネルギー

初期には、エネルギーが既知の電子を用いて制動輻射されるγ 線を用いて光分解反応を起こさせて、電子エネルギーと中性子の計測率の関係をグラフに描いて、決定された。結晶格子を回折格子に見立てた測定器 (bent crystal specrometer) を使用して、陽子の中性子捕獲に伴うγ 線のエネルギーを高精度に測定する事も可能だ。

陽子と中性子を束縛するポテンシャルを想定してみる。W を束縛エネルギーとすると、ポテンシャルの外では波動関数は $\kappa = \sqrt{2\mu\, W}/\hbar = 0.2306 fm^{-1}$ 程度の波数で指数関数的に小さくなる。半径が R_d の井戸型ポテンシャルを仮定して、その深さ V_d を推定してみよう。ポテンシャルの内部 $u_i(r)$ と外部の解 $u_e(r)$ は、

$$k^2 = \frac{2\mu(V_d - W)}{\hbar^2}$$

とすると、

$$u_i(r) \propto \sin(kr), \quad u_e(r) \propto \exp(-\kappa\, r).$$

$r = R_d$ で両者が滑らかにつながる必要があるから、$\tan(k\, R_d) = -k/\kappa$ という等式が成立する必要がある。この方程式は超越方程式だから、数値的にしか解けない。$k\, R_d$ は π / 2 よりも少し大きい程度だと検討をつけて、後は何回か修正を繰り返してみるとよいだろう。

R_d [fm]	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
V_d [MeV]	59.444	36.427	25.345	19.096	15.191

この計算に使用したパラメータは, $\hbar c = 197$ MeV fm, $2\mu\, c^2 = 938$ MeV, W=2.2 MeV

ここでは、ポテンシャル内部で波動関数が節を持たない事を仮定した。もしも節を持つならば、それは励起状態であるはずだ。

この数値の有効桁数はそんなにあるとは思えないが、大まかな原子核のポテンシャルの深さを与えているだろう。

2) スピン

陽子と中性子のどちらもが 1 / 2 のスピンを持っているから、その合成系のスピンは 0 か 1 と考えるのが自然である。重陽子を対象とした核磁気共鳴の実験をすると、スピンが 1 であると結論できる。即ち、重陽子の内部では陽子と中性子のスピンは平行である。

この結論では、暗黙の内に、スピン依存力は小さく、陽子と中性子の相対運動の軌道角運動量は 0 である事を仮定している。

3) 磁気能率

陽子と中性子の磁気能率の代数和 $(2.79277-1.913042=0.879728\ \mu_N)$ は重陽子の磁気能率 $0.857409\mu_N$ にほぼ等しい。小さな差を無視すると、重陽子とは陽子と中性子のスピンが平行で、従ってスピンが 1 であり、磁気能率もこれに平行していると考えれば良い。すぐ後で述べる様に、重陽子には相対運動軌道角運動量が 2 の状態 (D 状態) が少しだけ混じっているとすると、この小さな差は D 状態に起因するものであると決めつける事も可能である。

次に、D 状態の混じり具合はどの程度か推定してみよう。核磁子 μ_N 単位で測った磁気能率は、角運動量の g 倍であるとする。ここで、軌道角運動量 $\mathbf{L}$ をとると、陽子 (中性子) に対して $g_L = 1(0)$ であり、固有スピン s に対しては、Dirac 方程式を引用すると $g_S = 2$ である。$g_L = 1$ である理由は、角運動量に関するメモの Wigner-Eckart の定理に関して簡単な説明をしておいた。中性子に対して $g_L = 0$ である理由は電荷が無いからである。陽子や中性子が Dirac 方程式に従わないとするならば、実際の値を使う。重陽子の角運動量演算子を $\mathbf{J}$ とし、$J_Z = J$ 状態波動関数 $|J,\ J_z = J >= \sqrt{1-p_D}|(S)\ J\ J_Z = J > +\sqrt{p_D}|(D)\ J\ J_Z = J >$ での磁気能率の期待値を計算する。ここで、右辺第 1 項が S 状態であり、第 2 項が D 状態であり、p_D は重陽子波動関数が D 状態を有する確率である。

磁気能率演算子 $\boldsymbol{\mu}$ の z 成分 μ_z を先ず書き下す。

$$\mu_z = g_{p\,L}\, L_{p\,z} + g_{p\,s}\, s_{p\,z} + g_{n\,L}\, L_{n\,z} + g_{n\,s}\, s_{n\,z}$$

右辺の最初の 2 項が陽子の軌道と固有スピン角運動量に付随する磁気能率の演算子であり、後半は中性子のものである。

軌道角運動量部分では、$L_{p\,z} = L_{n\,z} = L_{d\,z}/2$ 即ち、陽子と中性子の軌道角運動量は重陽子の軌道角運動量の半分であり、g 因子は 1 か 0 である。固有スピンに対しては、角運動量の値が 1 / 2 であるから g 因子は実際の値の 2 倍を使用しなければならない。

$$\mu_z = L_{d\,z}/2 + 2\mu_p\, s_{p\,z} + 2\mu_n\, s_{n\,z} = L_{d\,z}/2 + (\mu_p + \mu_n)(\, s_{p\,z} + s_{n\,z}) + (\mu_p - \mu_n)(\, s_{p\,z} - s_{n\,z})$$

ここで、$s_{p\,z} + s_{n\,z}(= S_{d\,z})$ は重陽子固有スピンの z 成分である。更に陽子と中性子のスピ

ンが平行ならば、$(s_{p\,z} - s_{n\,z}) = 0$ である。重陽子の全角運動量に対し $J_z = L_{d\,z} + S_{d\,z}$ であるから、

$$\mu_z = (1/2 - \mu_p - \mu_n)L_{d\,z} + (\mu_p + \mu_n)J_z$$

この演算子を上に書いた波動関数で挟めば良い。

$< J_z >= 1$ である。$< (S)|L|(S) >= 0$ も自明だろう。$< (D)|L_{d\,z}|(D) >= 3/2$ は後から導く事にすると、

$$< \mu_z >= \mu_p + \mu_n - 3/2(\mu_p + \mu_n - 1/2)\, p_D$$

これから $p_D = 4$ % という結論が導ける。

もしも陽子と中性子の間でπ 中間子がやりとりされ、この中間子が軌道角運動量を持っていたとすると、この結論は修正される。π 中間子の質量は核子の質量の約 1 / 7 であるから、(π 中間子磁子) があるとするとこれは核磁子よりも約 7 倍大きい。従って、π 中間子の運動の効果は核子の運動の効果よりも 7 倍大きく磁気能率に反映されるからである。

電子の固有スピンに対する g 因子が 2 である理由に付いて簡単に触れておこう。Dirac 方程式を外部磁場 **H** がある場合について書き、2 階の微分方程式を作ると、$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}$ の項が登場する。磁場に比例するエネルギーを与えるのは磁気能率であると解釈すると、この項の係数から g 因子が 2 と決定される。

古典論の近似では 1 となるべき因子が何故 2 であるか？という問に答えねばならない。

z 軸方向へ一定の速度で動く系への Lorentz 変換 $L_z(\beta_z)$ は既知とする。次にこの系から y 軸方向へ動く系へもう一度 Lorentz 変換 $L_y(\beta_y)$ をしてみよう。最初の系から、2 回の Lorentz 変換をした系への Lorentz 変換 L は両者の積である。

$$L = L_y(\beta_y)\, L_z(\beta_z)$$

具体的な計算は、適当に実行してもらいたい。この時、次の事に気付いて貰いたい。L_z, L_y は対称な行列であるが、その積は対称な行列と反対称な行列の和で書ける。

$$L = (L + L^T)/2 + (L - L^T)/2$$

対称行列の部分は、形を引き延ばしたり圧縮したりする変形に対応し、反対称行列部分は、系の回転に対応する事は、3 次元の行列に対して、変形する物体の力学で既に勉強したと思う。簡単に言えば、異なる二つの方向へ Lorentz 変換をすればどうしても回転を伴うという事である。別の言い方をすると、上で例示した場合に、z 方向と y 方向とで Lorentz 収縮の割合が異なる為に、x 軸を軸とする回転が発生しているのである。

加速度運動は、一般に微小な Lorentz 変換を次々に施していけば実現出来る。従って、電子が原子核の周りを周回運動するのも、この無限小変換を無数に繰り返す事により実現出来る。

これらの事が了解できれば、加速度運動をしている系に乗り移るためには系の回転を伴う事が了解できるであろう。加速度運動に伴う回転を Thomas の歳差運動 (precession) と呼ぶ。

後は、簡単な計算を実行すれば、確かに因子 2 が登場する事が分かる。

4) 電気的 4 重極能率

電気的 4 重極能率は、電荷分布に 2 次の Legendre 関数を掛けて体積分した値に比例する。従って、球対称な電荷分布ならば電気的 4 重極能率は 0 である。逆にこの値が 0 ではないと

いう事は、重陽子の電荷分布、従って波動関数、が球対称では無いと言っている事である。この様な波動関数では角運動量の期待値は 0 ではない。即ち古典的イメージでは回転している。(基底状態が回転している！！)

球対称な電荷分布ならば角運動量は 0 であり、従ってパリティーは正である。パリティーの保存則を仮定するならば、この球対称からのずれは軌道角運動量が偶数の状態でなければならない。重陽子の全角運動量と固有スピンはどちらも 1 であるから、許される軌道角運動量状態は 0 (S 状態) と 2 (D 状態) しかあり得ない。

軌道角運動量が 0、1、2、3 状態を分光学者は S(harp), P(rincipal), D(iffuse), F(undamental) 等の名前で呼んでいたので、この文字記号が今でも使用される。

S (D) 状態が混じっているという事は、核力は S 状態と D 状態を結びつける相互作用を含むという事である。このような相互作用としては、電磁気学で既に双極子能率の間の相互作用が登場している。この双極子間の相互作用を借りて来て、以下の様に書こう。

$$V_T(r)\, S_{pn}, \quad S_{pn} \equiv 3\,(\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n$$

ここで、$\hat{\mathbf{r}}$ は陽子から中性子へ向かう位置ベクトルに対応した単位ベクトルである。(逆向きでもよいが) この相互作用はテンソル力と呼ばれる。

全角運動量の保存則を満たすならば、相互作用はある意味でスカラーでなければならない。パリティーの保存則も満たしているべきだろう。更に、原点を動かしても実質的に変化は無いだろうから、相対座標だけを含んでいるのが望ましい。時間を反転すると、様子が変わってしまう (時間反転不変性) のはまずいだろう。

上の相互作用はこれらの条件を満足している。

位置ベクトルは極性ベクトルであるが、角運動量 (スピン) ベクトルは軸性ベクトルである事を思い出そう。角運動量ベクトルの内積はパリティーを保存する。

上の相互作用は、スピン空間で見ると 2 階のテンソルとして振舞うので、テンソル力と呼ばれる。

ここで述べた様な条件を満足するテンソル力は、他にも考えられるが、軌道角運動量を混ぜる事と取扱が簡単であるという理由で採用されていると理解しておいて良いだろう。この型のテンソル力は、以下のような書き換えも可能である。

$$\begin{aligned} S_{pn} &= \sqrt{\frac{24\pi}{5}}(Y_2(\hat{\mathbf{r}}) \cdot [\boldsymbol{\sigma}_p\, \boldsymbol{\sigma}_n]_2) \\ &= \textstyle\sum_m (-1)^m < 2\,m\,2-m|0\,0> Y_{2\,m}(\hat{\mathbf{r}})\{< 1\,m_p\,1\,m_n|2\,-m> \sigma_{p\,m_p}\,\sigma_{n\,m_n}\} \end{aligned}$$

右辺の意味は、スピン演算子 (ベクトルとしては角運動量 1 を持っている) が二つ組み合わされて 2 単位の角運動量をもつスピン演算子が作られている。このスピン演算子に軌道角運動量 2 を持つ演算子 Y_2 が組み合わされて全体としてはスカラーを作っている。

次にテンソル力が二つの角運動量状態 (S と D) を混ぜ合わせ、重陽子の基底状態に電気的 4 重極能率を導入する事を出来るだけ単純な手法で導こう。

習慣に従ってスピンが 1 / 2 の状態のスピン波動関数をα とβ で表そう。α (β) はスピンの z 成分が + 1 / 2 (− 1 / 2) の状態である。重陽子のスピン波動関数 χ はその z 成分が

1、 0、− 1 に対応して以下の様に書ける。

$$\chi_{1\,1} = \alpha_p\,\alpha_n, \quad \chi_{1\,0} = (\alpha_p\,\beta_n + \beta_p\,\alpha_n)/\sqrt{2}, \quad \chi_{1\,-1} = \beta_p\,\beta_n$$

下付き文字 p (n) が陽子 (中性子) を表す。p-n 間の相対運動波動関数を S(D) 状態に対して $u(r)/r\,Y_{0\,0}(\hat{\mathbf{r}})$ ($w(r)/r\,Y_{2\,m}(\hat{\mathbf{r}})$) と書く。スピンと軌道角運動量をあわせた波動関数を

$$\mathbf{Y}_{\ell\,s\,j\,m} = \sum_{m_\ell + m_s = m} < \ell\,m_\ell\,s\,m_s |\,j\,m > Y_{\ell\,m_\ell}(\hat{\mathbf{r}})\,\chi_{s\,m_s}$$

と書く。ここでは $s = 1$ を想定している。この書き方は、 Dirac 方程式を解く時にも登場したのを覚えているだろう。そこでは χ^{μ}_{κ} と書かれた。

スピンの z 成分が m である重陽子の波動関数 ψ_m は、以下の様に書かれる。

$$\psi_m = \{u(r)\mathbf{Y}_{0\,1\,1\,m} + w(r)\,\mathbf{Y}_{2\,1\,1\,m}\}/r$$

$m = 1$ の場合を球面調和関数とスピン波動関数を用いて露わに書き下すと、

$$r\,\psi_1 = u(r)\,\chi_{1\,1}/\sqrt{4\pi} + w(r)\{\sqrt{6}\,Y_{2\,2}\chi_{1\,-1} - \sqrt{3}\,Y_{2\,1}\chi_{1\,0} + Y_{2\,0}\chi_{1\,1}\}/\sqrt{10}$$

この式の右辺, 中括弧で括られた部分以降が D 状態波動関数の角運動量部分である。従って、$< (D)|L_{dz}|(D) >= 2 \times 6/10 + 1 \times 3/10 + 0 \times 1/10 = 3/2$ が導ける。

$\mathbf{Y}_{\ell\,s\,j\,m}$ の規格直交性を用いると、

$$\int \{u(r)^2 + w(r)^2\} dr = p_S + p_D = 1$$

であり、第 2 項が重陽子の D 状態の確率を与える。テンソル力の演算子 $S_{p\,n}$ が S 状態と D 状態を混ぜる事を示すには $S_{p\,n}\mathbf{Y}_{\ell\,1\,1\,m}$ を評価すれば良い。先ず $S_{p\,n}$ はスカラーである事に注意しよう。(即ち $S_{p\,n}$ は角運動量が 0 の演算子であるから、j や m の値を変えないだけでなく、行列要素は j には依存するかも知れないが m には依存しない)。$m = 1$ として行列要素を計算する。$S_{p\,n}$ は $\hat{\mathbf{r}}$ を二つ含むから、パリティーを変えないが軌道角運動量を 2 だけ変える可能性がある。従って

$$S_{p\,n}\mathbf{Y}_{0\,1\,1\,1} = a\,\mathbf{Y}_{0\,1\,1\,1} + b\,\mathbf{Y}_{2\,1\,1\,1}$$

と未知定数 a と b を用いて書けるはずだ。やってみると簡単に分かるが、$S_{p\,n}$ は全立体角で積分すると 0 になる。一方、右辺の第 1 項の角度部分 $Y_{0\,0}$ は定数だから積分しても 0 にならない。従って $a = 0$ である。b を決めるには $\theta = 0$ を代入すると $b = \sqrt{8}$ ときまる。

同様に

$$S_{p\,n}\mathbf{Y}_{2\,1\,1\,1} = \sqrt{8}\,\mathbf{Y}_{0\,1\,1\,1} - 2\,\mathbf{Y}_{2\,1\,1\,1}$$

である事も導ける。$S_{p\,n}$ はエルミート演算子であるから、$\sqrt{8}$ は既に確定しているので -2 だけを確認すればよい。

$\hat{\mathbf{r}}$ の方向を z 軸、即ち $\hat{\mathbf{r}} = (0,0,1)$ ととり、左辺を計算する。

$S_{p\,n} \to 3\sigma_{pz}\sigma_{nz} - (\sigma_{p\,+}\sigma_{n\,-} + \sigma_{p\,-}\sigma_{n\,+})/2 - \sigma_{pz}\sigma_{nz} \to 2\sigma_{pz}\sigma_{nz}$ である。但し陽子と中性子のスピン z 成分に関する昇降演算子を用い、これらの項の寄与は最終的に 0 になる事を用いている。

$\mathbf{Y}_{0\,1\,1} \to 1/\sqrt{4\pi}\alpha_p\,\alpha_n$ であり $\sigma_z\,\alpha = \alpha$ である事を使うと最終的に左辺は $2\alpha_p\,\alpha_n/\sqrt{4\pi}$ となる。

一方右辺では、$Y_{\ell\,m}(\theta = 0) = \sqrt{(2\ell+1)/4\pi}\delta_{m\,0}$ を使うと和は 1 項だけである。$< 2\,0\,1\,1|1\,1 >= 1/\sqrt{10}$ を使うと右辺は、$b\,\alpha_p\,\alpha_n/\sqrt{8\pi}$ となる。従って、$b = \sqrt{8}$ が導ける。

一般的な行列要素は、いわゆる Racah 代数を用いると以下の通り簡単に計算出来る。角運動量の計算練習に適当だろう。

$$((\ell' s)j\,m|S_{pn}|(\ell\,s)j\,m) = (-1)^{1+j+\ell}2\sqrt{30(2\ell+1)}(\ell\,0\;2\,0|\ell'\,0)\left\{\begin{array}{ccc}\ell' & 1 & j\\ 1 & \ell & 2\end{array}\right\}$$

$s = 1$ であるから、j を与えた時、取り得る $\ell,\ \ell'$ の値は $1)\,\ell = \ell' = j-1,\quad 2)\,\ell = \ell' = j,\quad 3)\,\ell = \ell' = j+1,\quad 4)\,\ell = j-1, \ell' = j+1,\quad 5)\,\ell = j+1,\ \ell' = j-1$ の場合があるが、4) と 5) は等しい事が簡単に導ける。これらの場合に具体的な表現を代入すると、以下の様な結果となった。

$\ell'\backslash\ell$	$j-1$	j	$j+1$
$j-1$	$-2\dfrac{j-1}{2j+1}$	0	$6\dfrac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}$
j	0	2	0
$j+1$	$6\dfrac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}$	0	$-2\dfrac{j+2}{2j+1}$

これだけの知識の範囲で、ポテンシャルが中心力とテンソル力の和 $V_C(r) + V_T(r)\,S_{pn}$ である時には $u(r)$ と $w(r)$ は以下の連立 2 階の微分方程式を原点では 0、無限遠では 指数関数的に減衰するという境界条件で解けば良い。

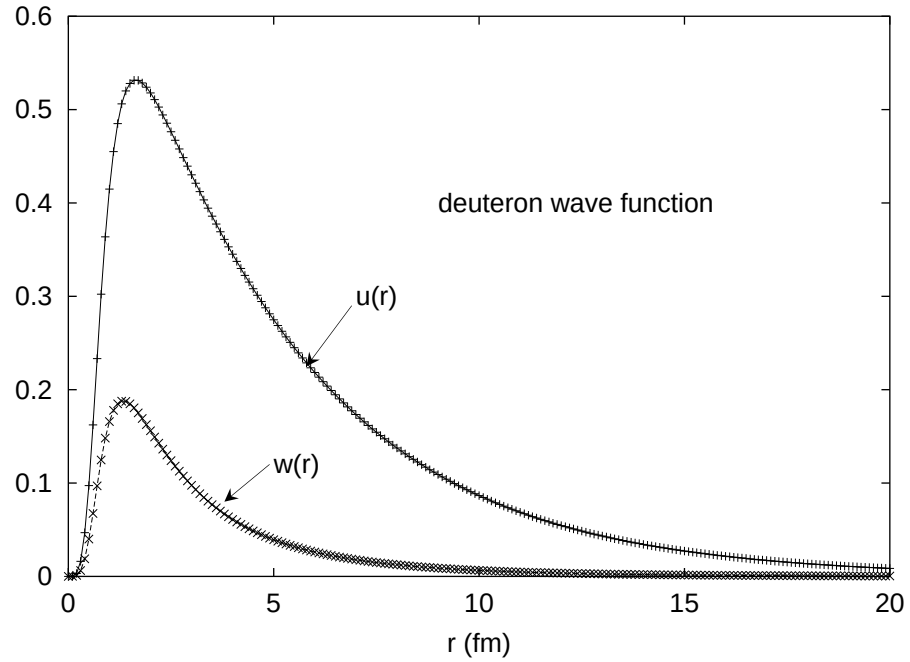
$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u(r)}{dr^2} &= \{E - V_C(r)\}u(r) - \sqrt{8}V_T(r)\,w(r)\\ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{6}{r^2}\right)w(r) &= -\sqrt{8}V_T(r)\,u(r) + \{E - V_C(r) + 2V_T(r)\}w(r)\end{aligned}$$

この方程式が解けると、電気 4 重極能率は、以下の式を計算すればよい。

$$\begin{aligned}Q &=< (3\,\cos^2\theta - 1)\,r^2/4 >_{m=1}\\ &= 1/\sqrt{50}\int r^2u(r)w(r)dr - 1/20\int r^2w(r)^2dr\end{aligned}$$

真中の式の分母に因子 4 が登場する理由は、波動関数の計算には、陽子と中性子の相対座標が使用されているのに、電荷分布を評価する場合は、重心の座標を使用するためである。

実際には後で述べる様に、もう少し複雑な相互作用を仮定して束縛状態以外に散乱の断面積をも再現する様なポテンシャルが使用される。以下に図示するのは、Reid soft core potential と呼ばれるポテンシャルを用いて計算した重陽子の波動関数である。



この場合には、束縛エネルギーや 4 重極能率は実験値を再現している。p_D は約 6 % である。この 6 % という数字は小さい様であるが、$\ell = 2$ に対する遠心力ポテンシャルは、例えば $r = 2fm$ に対して、$\hbar^2/2\mu\ell(\ell+1)/r^2 = 60\ \mathrm{MeV}$ である。この値は先に推定した重陽子束縛ポテンシャルと較べて、小さな値ではない。テンソル力はこの遠心力に打ち勝つだけの強さがあるから、無視出来るような、小さな補正ではない。

$u(r),\ w(r)$ の原点付近での振舞いをみてみる。遠心力ポテンシャルが他の成分を圧倒するならば、$u(r)$ は r、$w(r)$ は r^3 に比例する様な振舞いをして欲しい。実際は、原点付近でほとんど 0 である。この理由は後から述べる、斥力芯のせいである。

陽子・中性子弾性散乱と核力

先ず入射エネルギーが低い場合のデータから、核力は非常に強いスピン依存性を有する事を学ぶ。次に、エネルギーが低い時には弾性散乱からポテンシャルのどのようなパラメータを決める事が可能かを調べ、弾性散乱を表現する実用的なパラメータである散乱長や有効 (相互作用) 距離について説明する。エネルギーが高くなるとどのような現象が現れるかを簡単に説明し、核子・核子散乱の位相のずれを最後に紹介する。

陽子・陽子散乱は電荷の存在と反対称化の為に取扱が複雑になるだけであるから結果を引用するにとどめる。

スピンが関与しない場合の散乱振幅 $f(\theta)$ と微分断面積 $\sigma(\theta)$ は、位相のずれ δ_ℓ を用いて

以下の様に表せる。

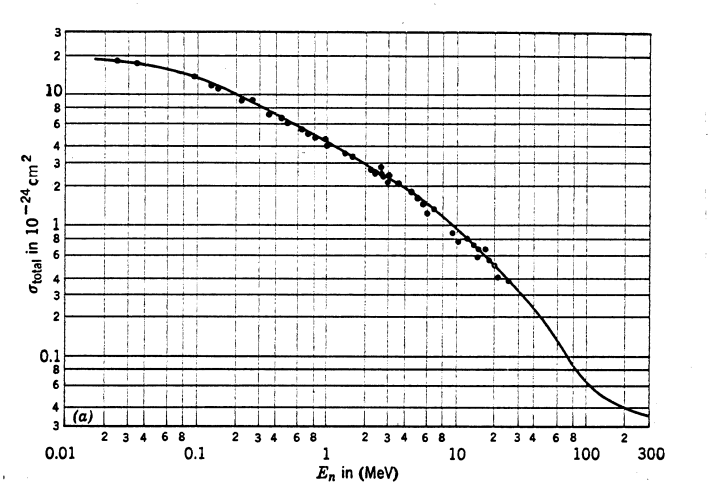
$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{\ell}(2\ell+1)(e^{2i\delta_\ell}-1)P_\ell(\cos\theta)$$
$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2$$

エネルギーが低い場合の弾性散乱では、散乱に寄与する部分波は S 波だけだと考える事が出来るだろう。もしも S 波 $(\ell = 0)$ だけが効くならば、微分断面積は散乱角に依存しないから、微分断面積を立体角で積分した、全断面積を問題とすればよい。

重心系での運動エネルギーを 1 MeV だと仮定して、S 波近似の妥当性を確認しておこう。相対運動の波数は、$k^2 = 2\mu E_{cm}/\hbar^2 = 938 \times 1/197^2 = (0.155 fm^{-1})^2$ で評価できる。一方陽子半径は大きく見積もっても $R = 1.5fm$ としても、$kR < 1$ という近似は正しいと推定される。

しかし重陽子を標的とした偏極重陽子による $(\vec{d}$,p) 反応のベクトル分析能の低エネルギーでの実験データをみると、この結論はどこかで間違っているのではないかと思わせる節がある。

下に、p-n 系の全断面積のエネルギー依存性のグラフを示す。



$1eV$ 程度の非常に低いエネルギーでは約２０．４ $\times 10^{-24}\,cm^2$ となっている。$10^{-24}\,cm^2$ を 1 b (バーン) と呼ぶ事がある。

先に推定した重陽子の井戸型ポテンシャルを使用して S 波の位相のずれを計算してみよう。$r = R_d$ での内・外の解が滑らかにつながるという条件は以下の通りである。

$$k_{in}\cot(k_{in}R_d) = k_{out}\cot(k_{out}\,R_d + \delta_0)$$

少し手抜きをしよう。ポテンシャルを与えた時、束縛状態の数 N と 0 エネルギーでの位相のずれ $\delta(E=0)$

に関する Levinson の定理というのがある。

$$\delta(0) = N \times \pi$$

非常にエネルギーの低い極限では位相のずれはπ であるから、今の条件では $\delta = \pi - \alpha$ と書いた時、α は非常に小さな数である。pp 74 核子・核子散乱の位相のずれの図、$T = 0$, $^3S_1$ 状態の位相のずれを参照。

従って、接続条件の式は、以下の様に変形できる。

$$\frac{\sin k_{out}\, R_d}{k_{out} - \alpha} = R_d - \frac{\alpha}{k_{out}} = \frac{\tan k_{in} R_d}{k_{in}}$$

全断面積 σ は

$$\sigma = 4\pi \left(\frac{\sin \alpha}{k_{out}} \right)^2 = 4\pi {R^2}_d \left(1 - \frac{\tan k_{in} R_d}{k_{in}\, R_d} \right)^2$$

この式の左辺を見ると、断面積は入射エネルギーに依存するように見えるが、右辺を見ると、低エネルギーの極限では、断面積はエネルギーに依存しない事がわかる。この事実は上に引用した断面積の実験事実と整合している。

先に用いた重陽子の束縛エネルギーを再現するポテンシャル (pp 58) を用いて数値計算した結果を表にまとめると、以下の様になる。

R_d [fm]	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
σ [b]	3.28	3.63	4.00	4.40	4.82

この値は、上に引用した値の約 1 / 5 である。即ち、かなり見当外れな値であるから、反省を強いられる。

陽子と中性子はそれぞれ 1 / 2 のスピンを持っている。従って合成系のスピン S は 0 と 1 が可能である。一方重陽子のスピンは 1 であるから、ここで引用したポテンシャルはスピンが 1 の系の相互作用であって、スピンが 0 の系のポテンシャルはこれとは様子が異なると考えてみる。$S = 0,\ \ 1$ の可能性は統計的には 1 対 3 であるから、$\sigma(S = 1) = 4\, b$、$\{\sigma(S = 0) + 3 \times \sigma(S = 1)\}/4 = 20\, b$ という事実を説明する為には、$\sigma(S = 0) = 68\, b$ となる。即ち、$^3S_1$ 状態と $^1S_0$ 状態とでは断面積が 1 5 倍程度異なる ！ $^3S_1$ と $^1S_0$ 状態とでかくも大きく断面積が異なるという事は、核力のスピン依存性が非常に大きいと言う事が出来る。一方、それはそうなんだろうがあまりにも異常だから、何か物理が背後に潜んでいるのでは無いだろうかと考える必要があるだろう。

スピンが S、軌道角運動量が L 両者のベクトル和が J である状態を考える。スピンの量子化軸成分は 2 S + 1 種の値をどれかをとるから、この 2 S + 1 をスピン (に起因する) 多重度と呼ぶ。分光学では、このスピン多重度を左上に、軌道角運動量を示すアルファベットを中心に、J の値を右下に書く。従って、軌道角運動量が 0 で、スピンが 0 又は 1 、従って J = 0 又は 1 の状態を それぞれ $^3S_1$, $^1S_0$ と記し、triplet S(エス) 1(イチ、ワン)), single S 0(ゼロ) と呼ぶ。

散乱長と有効距離

1) 上にほのめかした様に、$^1S_0$ 状態の散乱現象は、何か説明を要する事がありそうだ。 2)

重陽子の束縛状態ポテンシャルや低エネルギー状態の散乱を記述するポテンシャルはどの程度の精度で決定できるのか？といった問題を考えてみるのがここでの目的である。

半径が a、深さが V の井戸型ポテンシャルの束縛状態の問題を解いた事があるだろう。この問題では束縛エネルギーは $V\,a^2$ の関数であり、この値が一定であれば、a や V はかなり変えても変化が無いという結論であった。

実は、$V\,a^2$ は、力の体積分という意味がある。$\int(-d\,V/dr)r^2dr \propto V\,a^2$ である事はすぐに分かるだろう。力の体積分が同じならば、束縛エネルギーも同じであると解釈出来る。

同じような事が、低エネルギーの散乱現象でも言えるのではないかという事である。

ベーテの定式化を引用して、説明をしよう。ポテンシャルが $V(r)$ で与えられた Schrödinger 方程式を二つのエネルギー $E_1,\ E_2$ で書き下す。

$$\frac{d^2\,u_1}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}(-E_1+V(r))u_1=0$$

$$\frac{d^2\,u_2}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}(-E_2+V(r))u_2=0$$

上の式に u_2 を掛け、下の式に u_1 を掛けて差を作り、$0<r<R$ で積分する。

$$[u_2(r)u_1'(r)-u_1(r)\,u_2'(r)]_0^R=(k_2^2-k_1^2)\int_0^R u_1(r)\,u_2(r)\,dr$$

ここで、$k_i^2=2\mu\,E_i/\hbar^2$ である。この式には、ポテンシャルが登場しないから、ポテンシャルに依らずに成立する。

ポテンシャルが無い場合に、遠方で上の解と一致するような波動関数を導入する。

$$v_i(r)=\sin(k_i\,r+\delta_i)/\sin(\delta_i),\quad (i=1,\ 2)$$

但し、右辺の分母は、$v_i(r)$ の規格化因子であり、$v_i(r=0)=1$ となるようにつけてある。$v_i(r)$ に対しても同様の操作をすると、

$$[v_2(r)v_1'(r)-v_1(r)\,v_2'(r)]_0^R=(k_2^2-k_1^2)\int_0^R v_1(r)\,v_2(r)\,dr$$

u_i と v_i に対する式の差を作り、$R\to\infty$ とすると、$v_i(0)=1,\ u_i(0)=0$ であるから、

$$\begin{aligned}v_2'(0)-v_1'(0)=&\ \ k_2\cot\delta_2-k_1\cot\delta_1\\ =&\ \ 1/a(k_1)-1/a(k_2)=(k_2^2-k_1^2)\textstyle\int_0^\infty(v_1(r)v_2(r)-u_1(r)u_2(r))dr\end{aligned}$$

この式は任意のエネルギーとポテンシャルで成立する。ここで導入された長さの次元を持つパラメータ $a(k)$ は散乱長 (scattering length) と呼ばれる。$k_1=0,\ \ k_2=k$ と置くと、

$$lim_{k\to0}\,k\cot\delta=-1/a(0)$$

であるとして、

$$k\cot\delta = -1/a(k) = -1/a(0) + \frac{k^2}{2}\rho(0,E)$$

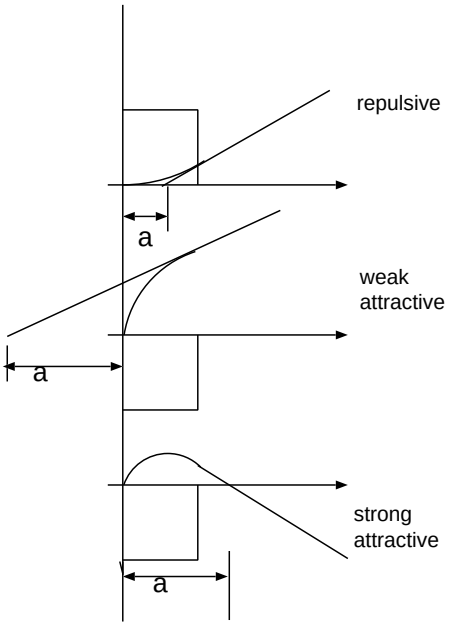
ここで、 ρ は次式で定義された。

$$\frac{1}{2}\rho(0,E) = \int_0^\infty (v_0\,v - u_0\,u)dr$$

特にゼロエネルギーでの極限でのこの積分を r_e と書いて有効距離 (effective range) と呼ぶ。

さて、ここまでは単語 (概念) の定義であった。次に散乱長の物理的な意味を調べる為に、井戸型ポテンシャルを導入してみよう。積分項を無視し、$k\cot\delta$ は $k\,R \ll \delta$ だとすると、核表面での波動関数の対数微分であるから、核表面での波動関数の接線を直線的に伸ばした時の x 軸との切片の座標という意味を持つ。

点 $(R, u(R) = \sin(kR+\delta))$ を通り、傾きが $k\cos(kR+\delta)$ の直線の x 軸との交点は $x = R - \sin(kR+\delta)/k\cos(kr+\delta)$ である。従って、以下の図はいくらか正確さを欠く。



相互作用が斥力か、強い引力の時には scattering length a は正であり、弱い斥力ならば負となる。相互作用が少しずつ強くなると、scattering length は負でその絶対値が大きくなる。更に増えると、一度発散してから正の大きな値となる。発散するところは、束縛エネルギーが 0 となるポテンシャルの強さに対応する事は簡単に理解できるだろう。

断面積は a^2 に比例するから、$^1S_0$ 状態に対する断面積が非常に大きいという事は、$|a(^1S_0)|$ が非常に大きいという事である。H_2 分子による中性子の干渉性散乱の実験結果と、陽子と中性子との束縛状態は $^3S_1$ 状態に一つあるだけだと仮定すると、$a(^1S_0) < 0$ が導ける。即ち、$^1S_0$ 状態では弱い引力が働き、もう少し引力が強ければ束縛状態になる。約 70-80 keV の位置に共鳴状態があると言われている。

この様に、低エネルギーの散乱では、観測から導ける物理量は、第 1 には散乱長であり、エネルギー依存性からは有効距離が導ける。逆に言えば、更なる詳しい物理量を実験データから導き出す事は困難である。

この事情を、ポテンシャルの形に依存しない (shape indenendence) 解析と呼ぶ場合がある。

$a(k)$ を用いると、全断面積は、$\sigma = 4\pi\, a(k)^2/(1+(k\,a(k))^2$ と表せる。分母を 1 だと近似すると、$a(k)^2$ が断面積を与え、従って、共鳴状態付近では非常に大きな断面積になる。これが、$\sigma(^3S_1)$ が非常に大きい理由である。

陽子と中性子の弾性散乱の実験はパラフィンを中性子で照射して行われた事がある。この時、Fermi は面白い事に気付いた。

散乱振幅を Born 近似で表現すると、

$$f \propto \frac{2\mu}{\hbar^2}\int \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})V(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

であるとしよう。即ち散乱の原因となる相互作用のフーリエ成分が散乱振幅を決める。しかし積分の前に換算質量が入っているから、散乱振幅は換算質量にも比例する。もしも換算質量が、実質的に変化するならば、断面積はこれに伴って変化するはずである。一方我々は、共鳴現象というのがある事を知っている。ある物体を固有振動数で駆動すると、簡単に動く。

パラフィン中の陽子は、C-H 結合を通じて近くの炭素原子核と結合しているがこの結合のエネルギーと入射中性子の運動エネルギーが共鳴を起こすと見掛け上陽子の質量が軽くなる。即ち換算質量が核子質量の半分よりも大きくなり、全断面積が２０ b よりも大きくなる。この化学結合の共鳴周波数よりも中性子の運動エネルギーが小さくなると、化学結合は非常に硬くなるから、中性子から見た陽子の質量は非常に大きくなる。即ち換算質量は中性子の質量と同じになる。従って、全断面積は化学結合が無視できる様な高いエネルギーの場合の 4 倍にまで大きくなる。

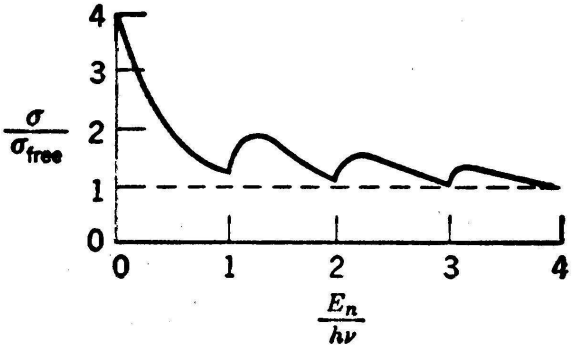


FIG. 10. Cross section for scattering of neutrons by elastically bound protons.

H. Bethe の教科書から引用した、n-p 散乱全断面積の化学結合が効いて来る様なエネルギー領域での全断

面積のエネルギー依存性。

換算質量を見掛け上無限大とする様な実験が Mössbauer により行われた。多くの原子核の励起状態の幅は非常に狭いが有限である。例えば平均寿命が 10^{-12} 秒だとすると、$\hbar = 6.58 \times 10^{-16}\ eV\ sec$ であるから、幅は約 6.6×10^{-4} eV である。

原子核からγ 線が放出されたとする。このγ 線を母核にあてても、吸収される事はほとんどない。それは、運動量が保存しなければならないが、γ 線を放射する際、母核が反跳運動量を貰うために、γ 線のエネルギーが励起エネルギーよりも幾らか少なくなっているためである。もしも、母核の質量を見掛け上無限大に出来ると、母核がもらう反跳エネルギーは 0 となり、γ 線のエネルギーは、励起状態の励起エネルギーと等しくなり、他の (母核と同種の) 原子核に吸収され得る。

母核が貰う分だけ、γ 線のエネルギーを (Doppler 効果を利用して) 増やしてやっても良い。

陽子・陽子散乱と核力の荷電独立性

陽子と陽子との弾性散乱は、以下の特徴を有する。

1) Pauli 原理を考慮する必要がある。従って、微分断面積は９０度対称である。

2) 電荷が存在する為に、クーロン力の補正をせねばならない。

クーロン力は斥力であり、絶対値がはっきり分かっているので、核力とは相殺的に干渉するはずである。この干渉性が確認できるから、散乱長の符号が負である事がはっきりする。

約４００ keV 、実験室系で４５度の散乱角でクーロン力と核力が相殺的に干渉しているのが観測されている。これから、核力は引力的である事がわかる。

3) 全系のアイソスピン T が 1 であるから、核力の状態依存性に対する制限がきついので、結論が導き易いという有利な点もある。実験的には、陽子の検出効率が１００％と考えられるために、陽子・中性子散乱に比べて精度が高い。

しかし、エネルギーが低い場合には、測定結果が散乱長と有効距離というパラメータに集約できるという特徴は変わらない。

以下に 玉垣著 ‘大学院核物理’ pp131 表４. 2 から数値を引用しておこう。

状態	系	散乱長 (fm)	有効距離 (fm)
$^3S_1$	np	5.424	1.759
$^1S_0$	np	-23.748	2.75
$^1S_0$	pp	-17.9	2.82
$^1S_0$	nn	-16.45	2.83

この表で、陽子・陽子散乱から導かれた数値は、クーロン力の寄与を差し引いて核力だけの効果に変換した後の値である。np と書かれた方のデータの精度が良いのは、重陽子 (np 系の束縛状態) に関する高精度の情報が取り込まれているからである。

$^3S_1$ 状態には束縛状態が存在するから、散乱長は正であるが、$^1S_0$ 状態に対しては散乱長が負であるから、束縛状態は存在しない。

大雑把に言えば、$^1S_0$ 状態のパラメータはほとんど同じである。np 系の散乱長が pp や

nn 系の値よりもいくらか大きい。先に与えた散乱長の直観的な意味から言って、ほんの少しだけ引力が大きいと散乱長は大きく変化する領域にあるから、その差は最初の近似としては無視できるだろう。

有効距離の列を見ても、同様の思いをするだろう。

この様に考えた時、核力は荷電には依存しない (charge independence) という。これが、Pauli が考えたアイソスピンの意味付けの一部である。詳しく見ると、np の散乱長が幾らか長い。ここまでを認めた時には核力は電荷に関して対称である (charge symmetry) という人もいる。

エネルギーが高くなった時の陽子・中性子散乱と交換力

非常に低いエネルギーの時は、S 波だけが散乱に寄与するから、微分断面積は角度に依存しない。一方、エネルギーが上がると複数の部分波が散乱に寄与し、微分断面積は角度に依存する。従って散乱量の角度依存性を測定する必要が出て来る。

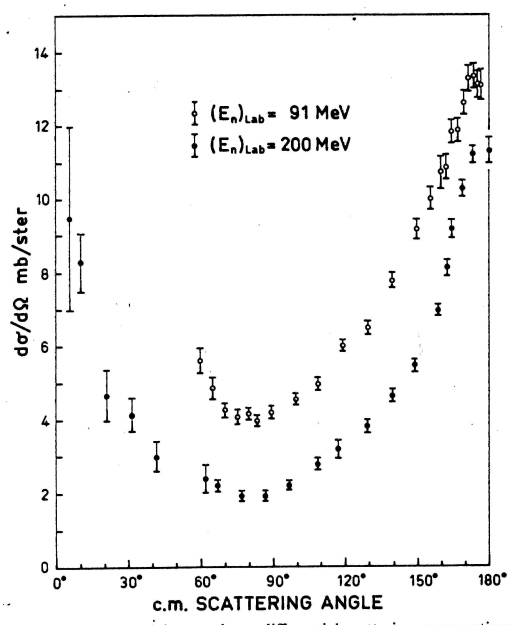


Figure 2-31 The experimental data on the *np* differential scattering cross sections are taken from R. H. Stahl and N. F. Ramsey, *Phys. Rev.* **96**, 1310 (1954) (91 MeV data) and Yu. M. Kazarinov and Yu. N. Simonov, *Exptl. Theoret. Phys. U.S.S.R.* **43**, 35 (1962) (translation *Soviet Phys. JETP* **16**, 24 (1963)) (200 MeV data). The figure gives only a small sample of the available measurements; see, for example, the compilation by Moravcsik (1963).

この図はエネルギーが高くなり、高い部分波まで効いて来るような場合の陽子と中性子の弾性散乱微分断面積である。前方と後方にピークがあるのが特徴であり、ほぼ９０度対称になっている。直観的に言って、前方散乱は標的の縁をかする散乱だから断面積が大きくなるのは頷ける。一方、後方散乱は正面衝突に対応するから散乱確率は小さくなると予想したいところである。この現実と予想との矛盾を解決したい。

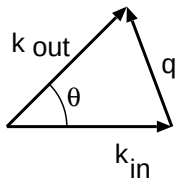
散乱現象が、入射ビームの進行方向に関して回転対称だと仮定しよう。この時、散乱振幅

は Legendre 関数で展開できる。Legendre 関数の内、次数が偶数ならば９０度対称であり、奇数次ならば９０度反対称である。従って、散乱振幅の偶数次展開係数が大きく、奇数次項は非常に小さい (端的に言えば０) ならば、実験事実を説明する事が出来るだろう。

奇数次項を小さくする様な相互作用とはどんな相互作用であろうか？ Born 近似を用いて、散乱振幅 T を評価する式をみながら考えてみよう。

$$T \propto \int e^{-i\mathbf{k}_{out}\cdot\mathbf{r}}\, V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_{in}\cdot\mathbf{r}}\, d\mathbf{r} = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\, V(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$$

ここで、$\mathbf{q} = \mathbf{k}_{out} - \mathbf{k}_{in}$ は運動量移行と呼ばれる。(正確には波数移行であるが)



図で θ は散乱角であり、次の式が成立する。

$$q^2 = k_{in}^2 + k_{out}^2 - 2\, k_{in}\, k_{out}\, \cos\theta$$

$\hbar\, q$ だけ反跳陽子が運動量を貰う。

散乱振幅はポテンシャルのフーリエ級数として与えられるのだから、$q = 0$、０度散乱、の場合に積分が最大となると予想される。後方散乱に対して積分を最大にするには、最初の式で一方の $\mathbf{r}$ の符号を変えて $-\mathbf{r}$ とすれば良い事に気付いた人がいる。即ち、指数関数の中を $\mathbf{k}_{out}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{k}_{in}\cdot\mathbf{r}$ の負号の部分を和となるように置き換えればよい。これには $P_M\mathbf{r} = -\mathbf{r}$ という陽子と中性子の座標を入れ換える演算子 P_M (Majorana の演算子) を導入し、$V(\mathbf{r}) \to V(\mathbf{r})(1 + P_M)$ でポテンシャルを置き換える。この式で係数が１ (P_M) の部分を Wigner (Majorana) 型ポテンシャルと呼ぶ。更に、Wigner 型と Majorana 型が１：１に混じっている時には Serber force (Serber mixture) と呼ぶ。

このような交換力は、核力の飽和性を説明するためにも必要であった。

陽子・陽子散乱の微分断面積も不思議な様相を示していた。

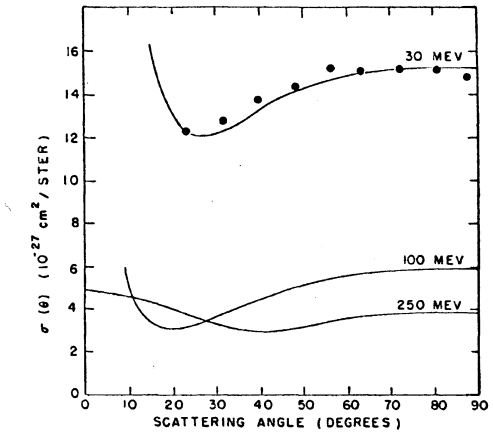


FIG. 4. Differential p-p cross sections at intermediate energies calculated from (2) with $r_0=0.60\times10^{-13}$ cm.

図は、斥力の存在を提案した Jastrow の論文から引用した陽子・陽子弾性散乱微分断面積の振舞いである。

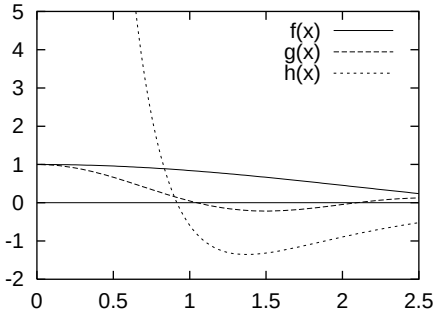
前方の散乱角では、クーロン力の為に微分断面積は非常に大きいが、少し後方に行くと、ある角度から微分断面積はほぼ平になる。この角分布は入射陽子の運動エネルギーを変えてもほとんど変化しない。エネルギーが低い領域では核力は引力的であったが、エネルギーが高くなると斥力的様相も見えて来るとしないとこの角分布は説明が付かない。エネルギーが低いと引力的であり、エネルギーが高いと斥力的様相が顔を見せる様なポテンシャルの形を次に予想しよう。Born 近似と Green 関数を用いると、位相のずれは次式で表現出来る。

$$\tan\delta_\ell = -k\int_0^\infty j_\ell(k\,r)^2\left\{\frac{2\mu}{\hbar^2}V(r)\right\}r^2\,dr$$

ボルン近似だと、散乱振幅はポテンシャルの Fourier 展開で与えられるから、運動量移行 $\mathbf{q}$ で書くと、右辺は j_0^1 となる。これを、散乱角が明示出来る様に、入射・放出角度を明示的に書くには、球ベッセル関数に関する以下の公式を利用する。

$$z_0(\sqrt{z^2+\zeta^2-2z\zeta\cos\theta}) = \sum_n (2n+1) j_n(\zeta)\, z_n(z)\, P_n(\cos\theta)$$

ここから、球ベッセル関数の 2 乗が登場する。

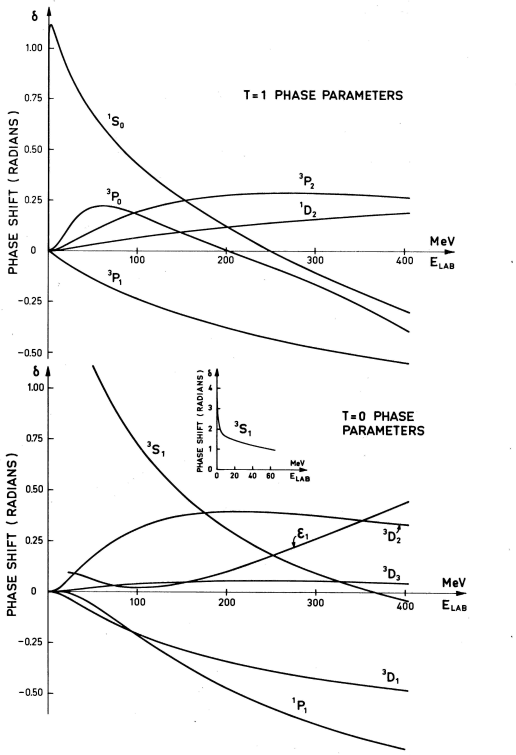


図では、エネルギーの異なる S 波 波動関数が 2 本とポテンシャルが描かれている。ポテンシャルは大きな r に対しては負、小さな r では正になるように描いてある。エネルギーが低いと、平均としては負のポテンシャル、エネルギーが高くなると正のポテンシャルが見える事が直観的に分かるだろう。

この様に、核力には、近距離では斥力、遠距離では引力 (状態依存であり、引力にならない場合もあるが) と考えられた。

位相のずれとスピン・軌道力

実験データの解析から、最終的には状態毎の位相のずれを求めるが、実験データだけからは、位相のずれを一つに決める事は出来なかった。r が大きなところでは、π 中間子を一つだけ交換するという状況を要求すると、位相のずれは一つに確定する事ができた。この結果の位相のずれのエネルギー依存性を Bohr と Mottelson の教科書から引用する。



上半分には $T = 1$ 状態の位相のずれのエネルギー依存性が、状態毎に描いてある。$^1S_0$ 状態には、束縛状態がないので、低エネルギーでもπ までは増えない。$^3P_{0,1\,2}$ の 3 個の状態のエネルギー依存性に注目してみよう。エネルギーが低いところでは、

$$\delta(^3P_0) > \delta(^3P_2) > \delta(^3P_1)$$

となっている。ところがエネルギーが増えると、

$$\delta(^3P_2) > \delta(^3P_0) > \delta(^3P_1)$$

となり、$J=0$ と $J=2$ の状態の相対的な関係が逆転している。$^3P_0$ 状態は低エネルギーでは引力的であるが、実験室系のエネルギーが２００ MeV よりも上では斥力的となっている。一方、$J=1(2)$ 状態ではエネルギーに依らず斥力 (引力) 的である。このような複雑なエネルギー依存性を説明するには、中心力とテンソル力だけでは説明出来ないので、スピン・軌道力が必要である。

中心力だけだと、異なる J に対して位相のずれは縮退しているはずである。テンソル力が中心力に加わると、$J=0,1,2$ に対して、$10,\ -5,\ 1$ という比で縮退が解けねばならない。

先に与えたテンソル力の行列要素の表を利用し、$l=1,\ j=0,\ 1,\ 2$ に対する対角要素の値を直接評価してみよ。

低エネルギーでは、定性的にはこうなっているが、エネルギーが上がると、この相対的な位置関係は一部で逆転している。従ってもう一つの縮退を解く要因が必要であり、スピン・軌道力が導入された。中心力とスピン軌道力が存在すると、$J=0,\ 1,\ 2$ に対して $-2,\ -1,\ 1$ の割合で縮退が解ける。両者を適当に混ぜると、このエネルギー依存性を説明するポテンシャルを作り上げる事は可能である。

図の下半分にあるのは pn 系で アイソスピンが 0 の場合である。$^3S_1$ 状態の位相のずれは 0 エネルギーに対し π に向かって増えている。この図にある ϵ_1 というグラフは、テンソル力の為に $^3S_1$ 状態と $^3D_1$ 状態は混じるが、この混じり具合を与えている。従って、原理的には $^3S_1$ や、$^3D_1$ という記号で状態を分類しているのは、間違いである。主成分が、$^3S_1$ や、$^3D_1$ という事である。

Reid は、各状態毎に位相のずれのエネルギー依存性を再現するようなポテンシャルを作った。その 1 例として、$^3S_1-{}^3D_1$ 結合状態のポテンシャルを引用しておこう。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}= &\ V_C + V_T\, S_{1\,2} + V_{LS}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} \\
V_C = &\ -10.463\,Y(x) + 210.936Y(2\,x) - 12715.2\,Y(4\,x) + 59545.8\,Y(6\,x) \\
V_T = &\ -10.463\{(1+3/x+3/x^2)Y(x) - (48/x+12/x^2)Y(4x)\} \\
&\ +1407.8Y(4x) - 10041Y(6x) \\
V_{LS} = &\ 2835.64Y(4x) - 16278.6Y(6x)
\end{aligned}
$$

ここで、 $x=0.7\,r$ 、$Y(n\,x)=e^{-n\,x}/x$ である。$0.7\ [\mathrm{fm}^{-1}]$ という値はπ 中間子のコンプトン波長からとられた。ポテンシャルの深さの単位は MeV である。テンソル力の括弧の中は、ポテンシャルが、原点付近で 1 $/x$ よりも高い巾で変化しないように付け加えられたいる。

このポテンシャルの数値を、エネルギー換算した核子の静止質量と比較してみると、Schrödinger 方程式は非常に硬い微分方程式になる事が分かるだろう。

更に、テンソル力は非常に強いので、二つの独立解を得るのは数値的にはかなり困難である。先に示した重陽子の波動関数は、このポテンシャルの束縛状態である。

弾性散乱

陽子と中性子が複数個結合した状態を原子核だとし、これに陽子 (必ずしも陽子である必要はないが) が入射して、標的の影響をうけて、跳ね返される場合を考える。

この時、標的原子核の内部エネルギーは散乱の前後で変化しない場合を弾性散乱、内部エネルギーが増える場合を非弾性散乱と呼ぶ。弾性散乱に於いて、反応の前後でスピンの向きが変化しているかもしれない。日本語で非弾性散乱という単語を英語で表現すると、inelastic scattering という場合と nonelastic scattering を指す場合がある。両者は異なる概念であるかもしれない。狭い意味での非弾性散乱 (inelastic scattering) では、標的核の原子番号や質量数は変化せず、励起エネルギーが変化する。広い意味での非弾性散乱 (nonelastic scattering) は、弾性散乱以外の全ての反応を含むから、陽子が入ってα 粒子が出て来ても良いし、何も出て来なくても構わない。inelastic を nonelastic を含む概念として使用している場合もある。

陽子の運動エネルギーが低い場合にはクーロン力による弾性散乱が起こり、エネルギーが高くなると核力との干渉が観測される。この干渉効果 (相殺的干渉) から核力は引力である事が結論される。干渉の程度から、核力をポテンシャルで記述した時の、平均的な強さや空間的な広がりについてのパラメータを知る事が出来る。

サイクロトロンで加速された陽子を外部に取り出すのに炭素箔による弾性散乱を利用した実験者がいた。この陽子ビームを用いての実験データは、他の方法で陽子ビームを取り出した実験者のデータと食い違いを見せた。この矛盾を説明する為に、偏極現象やスピン・軌道力が弾性散乱でも必要であるといった認識が生まれた。ここに原子核の魔法数を説明する為に導入されたスピン・軌道力は散乱実験からもその存在が確認された。

束縛状態としての原子核にスピン・軌道力が必要である事は、魔法数の存在から推定されていた。即ち、特に核子束縛エネルギーが大きな原子核の陽子数や中性子数は２、８、２０、２８、５０、８２、１２６と考えられ、この内、２０迄は調和振動子型のポテンシャルでも説明できるがこれ以上の魔法数を説明するのに、別の型のポテンシャルが必要であった。スピンと軌道角運動量が平行の時に引力となる様なスピン・軌道力が導入され、魔法数が解釈可能となった。

このスピン・軌道力は、原子物理学の登場するスピン・軌道力 (電磁力に起源を有する) とは符号や強さが異なるから、起源が異なるものと解釈される。

スピンという単語は、原子物理の世界では主に電子の固有スピン s を念頭において語られる。一方原子核物理の世界では、軌道角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ と固有スピン s との和 $\mathrm{j}(=\boldsymbol{\ell}+\mathrm{s})$ を指す場合が多い。固有スピンをある方向に向けておいたとしても、スピン・軌道力が強いために、すぐに固有スピンは軌道角運動量と z 成分のやりとりをしてしまうためである。

以下の式に注意しよう。

$$2\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{s} = \ell_+ s_- + \ell_- s_+ + 2\ell_z\, s_z$$

ここで、$\ell_\pm(s_\pm)$ は軌道角運動量 (固有スピン) の z 成分の昇降演算子である。右辺の最初の２項により z 成分が両者の間でやりとりされているのが分かるだろう。

原子の世界では、スピン・軌道力は必ずしも大きな効果を及ぼさないので、スピンの効果は、先ずは波動関数の対称性を通じて生じると考えて良い場合がある。一方、原子核現象で

はスピン依存力は強いので、最初からハミルトニアンのスピン依存性を取り入れた j-j 結合の表現を利用する場合が多い。j-j 結合では 中心力とスピン・軌道力が同時に対角化される。

$\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{s}$ と $j_z = \ell_z + s_z$ とが交換する事、$[j_z, \boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{s}] = 0$ を確認せよ。

これから、複素ポテンシャルによる弾性散乱を念頭においた話を始める。複素ポテンシャルは、低エネルギー中性子の原子核による弾性散乱の全断面積のエネルギーと標的核依存性を説明するために、Porter, Feshbach, Weisskopf により導入された。この概念はその後広い範囲の原子核反応の現象を説明する為に利用されている。この概念の意味つけは後で行う。

先ずはこれまでに学習した、点電荷の下での散乱問題に対する非相対論的な Schrödinger 方程式の解を振り返り、これに短距離力やスピン依存力が加わった時にどのように変更がなされるかをみていこう。

Schrödinger 方程式を以下の様に書く。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + U\right)\psi = E\psi$$

最初は ポテンシャル U は点電荷によるポテンシャルだとしておく。ψ を球面調和関数 $Y_{\ell m}(\theta,\,\phi)$ を用いて部分波展開する。

$$\psi = \sum_{\ell} a_\ell \,\frac{1}{r}\, u_\ell(r)\, Y_{\ell 0}(\theta,\,\phi)$$

平均的な入射ビームの方向を z 軸にとり、全系の z 軸に対する回転対称性を仮定すると、方位角 ϕ に依存しないから、$Y_{\ell,m}$ の内、$m = 0$ だけが残る。動径部分 $u_\ell(r)$ は以下の微分方程式を満足する。

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left\{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right\} u_\ell(r) + U(r)\, u_\ell(r) = E\, u_\ell(r)$$

この方程式は 2 階だから、二つの独立解を有し、原点で正則な解を $F_\ell(r)$ 、正則でない解を $G_\ell(r)$ と書く。これらの解は、$r \to \infty$ では次の漸近形を持つ。

$$F_\ell(r) \to \sin(kr - \frac{\ell\,\pi}{2} + \sigma_\ell - \eta\log(2kr))$$

$$G_\ell(r) \to \cos(kr - \frac{\ell\,\pi}{2} + \sigma_\ell - \eta\log(2kr))$$

ここで、η は Coulomb (Sommerfeld) parameter である。

$$\eta = \frac{Z z\, e^2}{4\pi\epsilon_0\,\hbar v}$$

σ_ℓ は Coulomb phase shift であり、次式で定義される。

$$arg\{\Gamma(\ell + 1 + i\,\eta)\} = \sigma_\ell$$

$\eta = 0$ の時、$\sigma_\ell = 0$ であり、$F_\ell(r),\ G_\ell(r)$ は球ベッセル、ノイマン関数と次の関係にある,

$$F_\ell(r) = (kr)\, j_\ell(kr), \quad G_\ell(r) = -(kr)\, n_\ell(kr).$$

展開係数 a_ℓ は放物座標で解いた散乱問題の解を再現する様にきめる。

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{kr}\sum_\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)} i^\ell e^{i\sigma_\ell} F_\ell(r) Y_{\ell 0}(\theta,\phi) \\ &= \frac{1}{kr}\sum_\ell (2\ell+1) i^\ell e^{i\sigma_\ell} F_\ell(r) P_\ell(\cos\theta) \\ &= \frac{4\pi}{kr}\sum_{\ell m} i^\ell e^{i\sigma_\ell} F_\ell(r) Y^*_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})\end{aligned}$$

この解は定在波での表現であるが、ある場合には進行波を用いて表現する。その時は、

$$O_\ell(r) \equiv G_\ell(r) + i\, F_\ell(r) \to e^{i(kr - \ell\pi/2 + \sigma_\ell - \eta\log(2kr))}$$

は外向き波であり、この複素共役 $I_\ell = O^*_\ell$ が内向き波である。これを用いると、

$$\psi = -\frac{1}{2ikr}\sum_\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)} i^\ell e^{i\sigma_\ell}\{I_\ell(r) - O_\ell(r)\} Y_{\ell 0}(\theta,\phi)$$

今の場合、内向き波に対して外向き波は逆位相で加えられている。

次に $U(r)$ に短距離力が加わったとしよう。この短距離力の事を今後核力と呼ぶ。核力が無視出来るような大きな r に対しては、Coulomb 波動関数が二つの独立解である事に変わりは無いが、散乱問題としては両者が混じりあった解を考える事になる。核力が非常に弱くなった極限では通常のクーロン波動関数に移行する様に混ぜ合わせる必要がある。実験条件、即ち入射波の部分は核力の有無には関係が無いから、外向き波の振幅と位相だけが調節の対象となる。そこで、クーロン力と核力 (中心力と仮定している) が存在する時の解の漸近形は以下の様に書けるはずである。

$$\psi \to -\frac{1}{2ikr}\sum_\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)} i^\ell e^{i\sigma_\ell}\{I_\ell(r) - S_\ell\, O_\ell(r)\} Y_{\ell 0}(\theta,\phi)$$

ここに登場した $O_\ell(r)$ の係数 S_ℓ を S 行列と呼ぶ場合がある。又、

$$S_\ell = e^{2i\delta_\ell} = 1 + 2iC_\ell$$

と書く場合もある。δ_ℓ は、核力による位相のずれである。ある場合にはこの式を位相のずれの定義だと言っても良い。C_ℓ を用いて、漸近形を書くと、

$$\psi \to \frac{1}{kr}\sum_\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)} i^\ell e^{i\sigma_\ell}\{F_\ell(r) + C_\ell\, O_\ell(r)\} Y_{\ell,0}(\theta,\phi)$$

この式を見ると、核力が無視出来る時には $C_\ell = 0$ だから、C_ℓ は核力の効果を表す係数であるとも言える。核力は短距離力だから、少し大きな軌道角運動量をとると、遠心力ポテン

シャル $\ell(\ell+1)/(2\mu\, r^2)$ は核力を圧倒してしまい、核力の効果はこの様な ℓ に対しては実質的に影響は無い。即ち $C_\ell \to 0, \quad S_\ell \to 1 \quad (\ell \to large)$ となる。

散乱振幅 $f(\theta)$ は,

$$f(\theta) = f_C(\theta) + \frac{1}{k}\sum_\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)}e^{2i\sigma_\ell}C_\ell Y_{\ell,0}(\theta,\phi).$$

但し、F_ℓ を含む項は和をとると、Coulomb 散乱振幅 $f_C(\theta)$ になるという事実を使用した。右辺第 2 項は、C_ℓ が大きな ℓ に対して無視できるならば、収束する。

α 粒子の様にスピンを持たない粒子の弾性散乱にはこの式が利用できる。

次にスピンを持つ場合に拡張しよう。$U(r)$ として Coulomb 力以外に スピン・軌道力を含む短距離力も考慮する。スピン・軌道力の強さが無視出来る極限では、スピン波動関数を χ_{s,m_s} として、これまでの表現に χ_{s,m_s} をくっつければば良い。スピン・軌道力が効いて来た時には、ℓ_z や s_z は良い量子数ではないが、j や j_z は良い量子数であるので、j や j_z が露わに見える形に式を書き直せば良い。(スピンが 1 / 2 の時は、パリティーの保存則を要求すると、ℓ は良い量子数となる)

準備作業として、ベクトル球面調和関数 $\mathbf{Y}_{\ell\, s\, j,m}$ を定義する。

$$\mathbf{Y}_{\ell\, s\, j,m} \equiv \sum_{m_\ell+m_s=m} (\ell, m_\ell,\ s, m_s|j,m) Y_{\ell\, m_\ell}(\theta,\phi)\chi_{s,m_s}$$

逆に解くと、

$$Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\phi)\,\chi_{s,m_s} = \sum_j (\ell, m_\ell, s, m_s|j,m)\mathbf{Y}_{\ell,s,j,m}$$

これまでの式にスピン波動関数を掛け、この記号を用いて式を書き換えると、散乱現象がおこるずっと前の入射粒子のスピンが m_s であるような波動関数の漸近形は

$$\psi_{m_s} \to \frac{1}{kr}\sum_{j,\ell}\sqrt{4\pi(2\ell+1)}(\ell\,0\,s\,m_s|j\,m_s)i^\ell e^{i\sigma_\ell}\{F_\ell(r) + C_{\ell\,j}\,O_\ell(r)\}\mathbf{Y}_{\ell\,s\,j,m_s}$$

これまでの式と比べると、和の足が ℓ と j になり、Clebsch-Gordan 係数が登場した事、C 係数の足にも j が付いた事、球面調和関数が置き換えられた事等が拡張された変化である。散乱が起こるずっと前には スピンの z 成分は m_s であり、ビームの進行方向に z 軸を選んであるから、$m_\ell = 0$ だけが 0 でない。この位置では $j_z = m_s$ であるが、j_z はスピン・軌道力や中心力が働いても変化はないから、散乱の前後で値を変えない。

散乱された波を観測する位置では、もう一度 m_ℓ や m_s は良い量子数となっているから、上の漸近形の中の $\mathbf{Y}$ を角度部分とスピン部分に展開し、

$$f_{m'_s,\,m_s}(\theta,\phi) = f_C(\theta)\,\delta_{m'_s,m_s} + \frac{\sqrt{4\pi}}{k}\sum_{\ell,j}\sqrt{2\ell+1}e^{2i\sigma_\ell} \times (\ell\,0\,s\,m_s|j\,m_s)(\ell\,m_\ell\,s\,m'_s|j\,m_s)C_{\ell\,j}Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\phi)$$

ここで、Clebsch-Gordan 係数の対称性

$$(\ell\ -m_\ell,\ s\ -m_s|j\ -m) = (-1)^{\ell+s-j}(\ell\, m_\ell,\ s\, m_s|j\, m)$$

を用いると、次の関係が導ける。

$$f_{-m'_s,\,-m_s}(\theta, \phi = 0) = (-1)^{m_s - m'_s} f_{m'_s,\,m_s}(\theta,\ \phi = 0)$$

この式が成立するから、全ての $f_{m',\,m}$ が独立という訳ではない。スピンが 1 / 2 の場合には、散乱振幅として二つの独立量 (複素数である) がある。相対論的な電子散乱の散乱振幅の式では F と G と書かれていた。

スピンがある時には漸近形がこの様に変更されたという事は、部分波展開が以下の様に変更されたという事である。

$$\psi_{m_s} = \sum_{\ell,\,j} a_{\ell,\,j\,m_s}\,\frac{1}{r}\,u_{\ell,\,j}(r)\mathbf{Y}_{\ell\,s\,j,m_s}$$

複素ポテンシャル $U(r)$ を以下の様に書いたとすると

$$U(r) = \tilde{V}(r) + \tilde{V}_{LS}(r)\ell\cdot\mathbf{s}$$

動径方向波動関数 $u_{\ell,j}(r)$ は以下の微分方程式を満足する。

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left\{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right\}u_{\ell,j}(r) = \Big\{E - \tilde{V}(r) \\ - < \mathbf{Y}_{\ell\,s\,j,m}|(\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{s})|\mathbf{Y}_{\ell\,s\,j,m} > \tilde{V}_{LS}(r)\Big\}\,u_{\boldsymbol{\ell},j}(r)$$

ここで、

$$< \mathbf{Y}_{\ell\,s\,j,m}|(\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{s})|\mathbf{Y}_{\ell\,s\,j,m} >= \{j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)\}/2$$

である。ポテンシャル $\tilde{V}(r)$ と $\tilde{V}_{LS}(r)$ が与えられると、原点から $u_{\ell,j}(r) = 0$ という境界条件で、遠心力と Coulomb 力の和が核力よりも充分大きくなる半径まで、この方程式を数値的に解く。大きな半径では上に与えた漸近形と対数微分が一致するように $C_{\ell,\,j}$ を調節する。ポテンシャルが与えられると、散乱振幅が計算できる。微分断面積は散乱振幅の絶対値の 2 乗で与えられる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(m_s \to m_{s'}) = |f_{m_{s'},m_s}(\theta)|^2$$

ここで与えた散乱振幅の式では、入射 (散乱) 陽子のスピンの向きを m_s, $(m_{s'})$ と指定した。もしも偏極していない陽子ビームを用いるならば、m_s について平均しておかねばならないから、以下の操作をする必要がある。$\sum_{m_s}\dfrac{d\sigma}{d\Omega}(m_s \to m_{s'})/(2s+1)$

さらに、散乱後の陽子のスピンの向きを測定しないならば、どちら向きのスピンでも数えてしまうという事だから、$m_{s'}$ について和を取る事になる。従って、通常の微分断面積の式は、以下の様に与えられる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2s+1} \sum_{m_s,\, m_{s'}} |f_{m_{s'},m_s}(\theta)|^2$$

古典力学の意味での粒子の軌道という概念を思いかえしてみる。もしも粒子に働く力が中心力ならば、軌道角運動量は運動の恒量となる。換言すれば、軌道は角運動量に垂直な面 (いわゆる運動面) にいつも留まる。量子力学的には軌道角運動量の z 成分 ℓ_z が良い量子数であるというのがこの場合に当たる。

逆に ℓ_z が良い量子数でないとは、古典力学の意味での粒子の軌道は、一つの面内には留まらないという事である。軌道上のある点で、軌道に対して接線・主法線・陪法線という概念を定義した、Frenet-Seret の公式を覚えているだろう。この公式で定義された概念を使うと、主法線や陪法線の向きが変化するという事である。

興味があれば、スピン・軌道力が存在する時の角運動量の時間変化をハイゼンベルグを運動方程式を用いて追いかけてみよ。

弾性散乱とスピン。 スピンが 1 / 2 の場合

散乱振幅 $f_{m_{s'},m_s}$ は二つの s_z に関する足を持っているから、スピンが 1 / 2 の場合、これを 2 行 2 列の行列として取り扱う事が出来る。 2 行 2 列の行列は 4 個の独立成分を持ち、以下の行列を用いて展開できる。

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

上に述べた散乱振幅の対称性を用いると、 4 個の内 2 個だけが独立である。

$$f_{1/2,\,1/2} = f_{-1/2,\,-1/2} \equiv g, \quad f_{-1/2,\,1/2} = -f_{1/2,\,-1/2} \equiv i\,h$$

とおくと

$$f = \begin{pmatrix} g & -ih \\ ih & g \end{pmatrix} = g\mathbf{1} + h\,\sigma_y$$

と書ける。電子散乱では、g のかわりに F、 h のかわりに G と書かれた。陽子と電子の弾性散乱で散乱振幅が同じ形式に書かれたという事は、背後に統一的な物理が潜んでいるという事である。この原理を次に説明しよう。

先ず、 4 個の独立量の存在を仮定すると、散乱振幅は以下の様に書ける。

$$f = g\,\mathbf{1} + \tilde{\mathbf{h}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

ここで、$\tilde{\mathbf{h}}$ は散乱振幅を Pauli 行列で展開した時の展開係数をベクトルとして書いたものである。ところで、散乱現象に関係したベクトルとしてどんなものが考えられるだろうか？先ず、入射ビームの方向 $\mathbf{k}_{in}$ と散乱粒子の進行方向 $\mathbf{k}_{out}$ が思い浮かぶ。 3 次元空間を規定するにはもう一つ独立なベクトルをこれらのベクトルに直交する方向に選べば良いから、波

数ベクトルの外積を採用する。この 3 個の独立なベクトルの線形結合を単位ベクトル化しよう。

$$\hat{\mathrm{l}} = \frac{\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}}{|\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}|}, \quad \hat{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{k}_{in} - \mathbf{k}_{out}}{|\mathbf{k}_{in} - \mathbf{k}_{out}|}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{k}_{in} \times \mathbf{k}_{out}}{|\mathbf{k}_{in} \times \mathbf{k}_{out}|}$$

これらのベクトルはこの順番で、右手系を作っているから、

$$\tilde{\mathbf{h}} = \tilde{h}_\ell \hat{\mathbf{l}} + \tilde{h}_m \hat{\mathbf{m}} + \tilde{h}_n \hat{\mathbf{n}}$$

と展開出来る。ところで、散乱の前後でパリティーが保存する事を要請すると、散乱振幅 f もパリティーを保存せねばならない。f がパリティーを保存する為には $\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{h}}$ もパリティーを保存する必要がある。角運動量は擬 (軸性) ベクトルであるから、$\boldsymbol{\sigma}$ も擬ベクトルであり、パリティー変換に対して符号を変えない。従って $\tilde{\mathbf{h}}$ も擬ベクトルでなければならない。上に登場した 3 個のベクトルの内、$\tilde{\mathbf{n}}$ だけが擬ベクトルであるから、$\tilde{h}_\ell = \tilde{h}_m = 0$ となり、$h = \tilde{h}_n$ という式が成立する。結局背後に潜んでいたのはパリティーの保存則であった。

今後、$\hat{\mathbf{n}}$ の方向を y 軸に選ぶ。

何故、y 軸が特別な方向として登場したのか？という問に直観的に答えよう。$\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{s}$ 力と座標系の特徴をとらえる必要がある。座標系では、入射粒子の方向に z 軸、検出器は xz 面内に置かれている。中心力が主な力だと仮定すると、軌道角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ は y 軸に並行となる。従って $\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{s}$ 力は、スピンが y 軸に並行ならば絶対値が最大となる。

次に無偏極陽子の弾性散乱による陽子の偏極について考えよう。入射ビームの進行方向を z 軸に選んだという事は、スピンの量子化軸もこの z 軸方向に選んだという事である。$r \to \infty$ の漸近領域での散乱波に対する波動関数 $\psi^s_{m_s}$ は以下の様に書ける。

$$\psi^s_{m_s} = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{m_{s'}} f_{m_{s'}, m_s} \chi_{s, m'_s}$$

この波動関数を用いて、スピンの期待値を計算すれば、散乱後の陽子のスピンが評価できる。但し、$\dfrac{e^{ikr}}{r}$ の因子は立体角を掛ける時に落ちるから、落しておく。

例に依って、$\chi_{1/2,\,1/2} = \alpha,\ \chi_{1/2,-1/2} = \beta$ という略号を使用する。$m_s = 1/2(-1/2)$ の陽子が入射すると、散乱後のスピン波動関数は $g\,\alpha + i\,h\,\beta\ \ (-i\,h\,\alpha + g\,\beta)$ となる。一方、

$$\sigma_x\,\alpha = \beta,\ \sigma_x\,\beta = \alpha,\ \sigma_y\alpha = i\,\beta,\ \sigma_y\,\beta = -i\alpha,\ \sigma_z\alpha = \alpha,\ \sigma_z\beta = -\beta$$

といった関係式が成立するから、

$$< \psi^s_{1/2} | \boldsymbol{\sigma} | \psi^s_{1/2} >= 2\Im(g\,h^*)\mathbf{e}_x + 2\Re(gh^*)\mathbf{e}_y + (|g|^2 - |h|^2)\mathbf{e}_z$$

$$< \psi^s_{-1/2} | \boldsymbol{\sigma} | \psi^s_{-1/2} >= -2\Im(g\,h^*)\mathbf{e}_x + 2\Re(gh^*)\mathbf{e}_y - (|g|^2 - |h|^2)\mathbf{e}_z$$

と計算する事ができる。入射陽子が無偏極であるとすると、この両者の平均を計算すればよいから、

$$< \boldsymbol{\sigma} >= 2\Re(g\,h^*)\mathbf{e}_y, \qquad \text{無偏極入射陽子 に対して}$$

このようにして、偏極していない陽子の弾性散乱により、スピン・軌道力があれば、散乱後の陽子は y 軸 $(\hat{\mathbf{n}})$ 方向に偏極している可能性がある。

これは、この節の最初に述べたサイクロトロンから炭素薄膜を用いて陽子ビームを引き出す時に起こった事である。

次に、偏極陽子ビームを用いた弾性散乱では何が起こるかを調べよう。ビームの進行方向に偏極した (例えば、陽子のスピンの向きがビームの進行方向を向いた) 陽子ビームとその逆向きに偏極したビームとでは、微分断面積に全然変化はない。どちらも $|g|^2 + |h|^2$ で与えられるからである。

この結論は、パリティーの保存を仮定していた。逆に核力がパリティー非保存性を有するならば、この両者の断面積は等しい理由はなくなる。

上に説明した様に、y 軸に (反) 平行に陽子スピンが向いていると、変化があるかも知れないと考えて、陽子のスピンを y 軸に向ける事から始めよう。

スピンが y 軸の上 (下) 向きの場合のスピン波動関数を $|+>$ $(|->)$ と書こう。これらは、α とβ の線形結合で表せる。

$$|+>= A\,\alpha + B\,\beta, \quad |->= C\,\alpha + D\,\beta$$

展開係数は次の式を満足する様に決められる。

$$<+|\sigma_y|+>= 1, \quad <-|\sigma_y|->= -1$$

時間反転に対する対称性から考えて、$|A| = |B|$, $|C| = |D|$ であるから、

$$A = e^{i\theta}/\sqrt{2}, \quad B = e^{-i\theta}/\sqrt{2}, \quad C = e^{i\phi}/\sqrt{2}, \quad D = e^{-i\phi}/\sqrt{2}$$

と置いて上の式に代入し、

$$\theta = -\pi/4, \quad \phi = \pi/4$$

と決める。即ち、

$$|+>= \frac{1-i}{2}\alpha + \frac{1+i}{2}\beta, \qquad |->= \frac{1+i}{2}\alpha + \frac{1-i}{2}\,\beta$$

入射陽子のスピンが y 軸に平行な場合の散乱振幅 f^+ は次式で与えられる。

$$f^+ = \begin{pmatrix} g & -ih \\ ih & g \end{pmatrix} |+>== \begin{pmatrix} g & -ih \\ ih & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-i)/2 \\ (1+i)/2 \end{pmatrix} = \frac{g+h}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$$

同様に、下向きスピンに対しては

$$f^- = \frac{g-h}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

スピンが上向き (y 軸に平行) ビームに対する断面積 $\sigma^+ = |f^+|^2 = |g+h|^2$ と下向きビームに対する断面積 $\sigma^- = |g-h|^2$ とは、h が 0 でない限り、異なる事が分かる。散乱振幅の h 成分はスピンの z 成分を変える事に注意しよう。そして、この成分はスピン・軌道力が 0 の時には 0 であるから、スピン・軌道力がある時に、h は 0 でない値を取る。

入射ビームと検出器が存在する面を考える。ビームの進行方向は z 軸であり、$\mathbf{k}_{in} \times \mathbf{k}_{out}$ に平行に y 軸をとるから、x 軸はこの面内にある。立場を変えて、実験室での Z 軸と Y 軸は z 軸 と y 軸に平行にとり、X 軸は X、Y、Z 軸がこの順序に右手系となる様にきめる。スピンが Y(y) 軸に平行である様にしておいて、実験室系の Z は同じで X が正 (負) である位置 (Y = 0) で散乱粒子を検出したとする。$X > 0$ の位置では、スピンは上向きだとすると、$X < 0$ の位置で検出した時には、スピンは下向きに入射しているのと等価である。$\sigma(X>0) = |g+h|^2, \quad \sigma(X<0) = |g-h|^2$ であるから、散乱角 θ は同じでも、ビームの進行方向に対して右と左に散乱される確率が異なる事になる。この相違を取り出す物理量として次に定義する非対称 A_y が使用される。

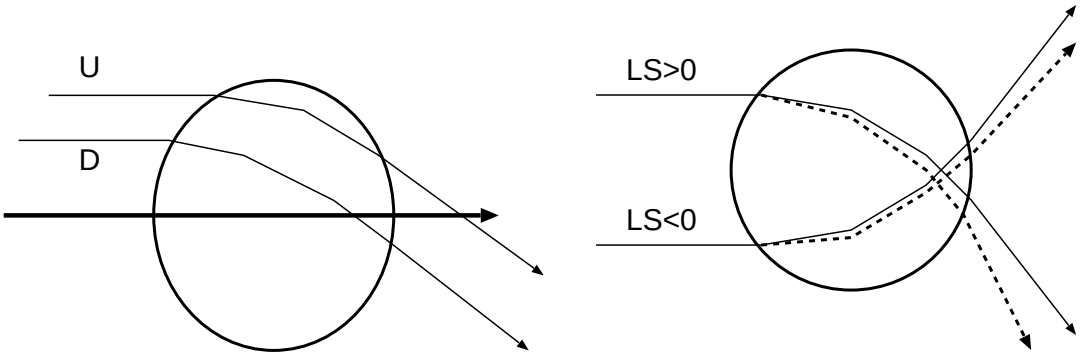
$$A_y = \frac{\sigma(\theta,\, \phi=0) - \sigma(\theta, \phi=\pi)}{\sigma(\theta,\, \phi=0) + \sigma(\theta, \phi=\pi)} = \frac{|g+h|^2 - |g-h|^2}{|g+h|^2 + |g-h|^2} = \frac{2Re(g\,h^*)}{|g|^2+|h|^2}$$

この量を vector analyzing power と呼ぶ人もいる。

ここでは、z 軸が量子化軸であった、スピン波動関数に対して、このスピン量子化軸を９０度回転して y 軸を量子化軸とした。その実現手法として、ここでの計算法は不格好であると思う人がいるだろう。無限小回転の演算子が角運動量である。第 k 軸の回りに角度 θ だけ場を回転する演算子は $e^{-i\theta\, j_k}$ である。今の場合、x 軸の回りに角度 $-\pi/2$ $(+\pi/2)$ だけ回転すると、α (β) 状態はスピンが $+y$ $(-y)$ 軸の方向を向く。従って $e^{\mp i\sigma_x\, \pi/4}$ を計算しても良い。こちらの方がスマートかな？

異なる量子化軸に対する角運動量の固有状態の間の関係を形式的にすっきりと記述する方法として、Wigner の D 関数がある。

$\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{s}$ 力がある時、１) 無偏極ビームの弾性散乱により散乱粒子は偏極すること、２) 偏極ビームを用いた弾性散乱では、散乱段面積に左右非対称が生ずる事を数式を用いて説明した。次に、直観的な説明を与えよう。



先ず左図を見ながら、偏極が発生する理由を考えよう。U と D と名付けた粒子は、スピンの向きが異なる。U 粒子には付加的に引力、 D 粒子には 斥力が加わり、結果としては同じ角度だけ散乱されるとしよう。図から分かるように、U 粒子と D 粒子とでは、標的核内での存在確率が異なる。核内に長く存在すれば、弾性散乱チャネルから別のチャネルへ吸収される確率が増える。図では D 粒子は U 粒子よりも余計に吸収されると考えると、外へ到達する粒子数は U の方が多くなる。従ってこの散乱角では、 U 方向に偏極している。

次に 右の図をみよう。図の面に垂直に偏極した粒子が標的に同じ衝突径数で入射する様子を描いている。もしも中心力だけならば実線の様に散乱され、左右の非対称は生じない。ここに弱いスピン・軌道力を導入しよう。$LS > 0$ と書いた方では引力が発生するならば、$LS < 0$ と書いた方では斥力が発生する。両者に対し、スピンの向きに対する軌道角運動量の向きが逆だからである。従って、散乱角が両者で破線の様に、異なる事になる。逆に左右の散乱角が同じになる場合には、衝突径数が異なる。従って、左右に同じ角度で散乱される場合には、左右の断面積が異なる。

経験的なポテンシャルを仮定すると、図の実線と破線の交点間の距離は、20 MeV 陽子と ^{40}Ca という組合せに対して、1 fm 程度であった。

実験データ

Glendenning の教科書から、α 粒子と陽子の弾性散乱の微分断面積の実験値を引用しよう。微分断面積は散乱角度に依存して大きく変化する。変化の割合を小さく見せる為に、ラザフォードの断面積で割った値をグラフに示している。

左の図は５０ MeV α 粒子の Sm 同位体 (^{148,150,152,154}Sm) からの弾性散乱微分断面積を比較したものである。α 粒子は原子核の内部に入ると、色々な反応が起こり (即ち吸収される為に) 後方に放出される確率は非常に小さくなる。

Sm 原子核の内、軽いものは割合に表面が硬い為に、回折像の山と谷がはっきりしているが、中性子をいくらかくっつけると原子核の表面が軟らかくなりぼやけた像になる。

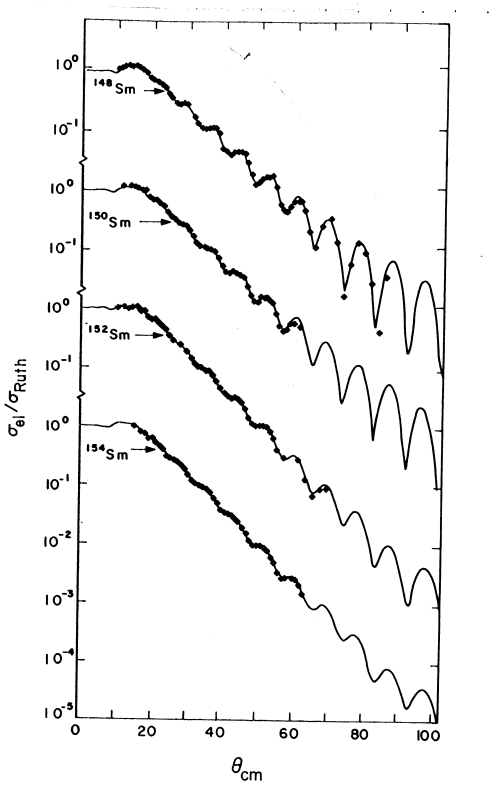


Fig. 4.2. The elastic scattering of 50-MeV alpha particles from samarium isotopes that span the spherical (A = 148) to deformed (A = 154) region. Note the systematic trend to weaker oscillations and steeper slope of the envelope of maxima with increasing collectivity. Solid lines are elastic optical-model calculations of the cross section by Jarvis *et al.* (1967).

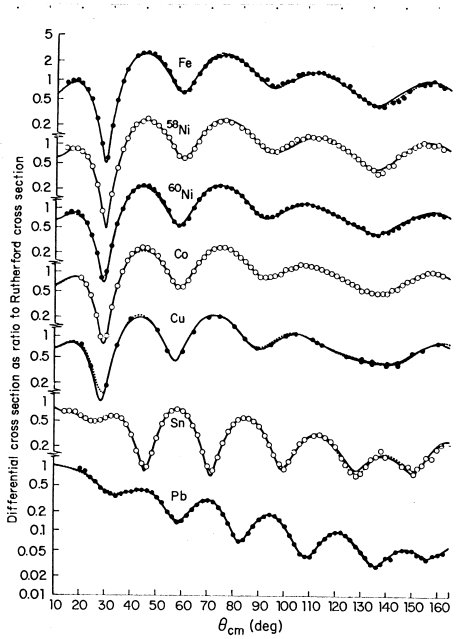
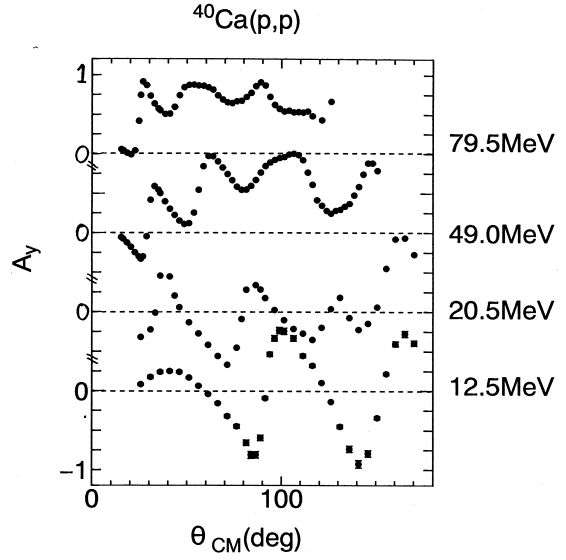


Fig. 4.3. Elastic scattering cross sections for 30-MeV protons and optical-model calculations from Satchler (1967).

右図は３０ MeV 陽子の各種原子核 (上から、 Fe, ^{58,60}Ni, Co, Cu, Sn, Pb) による弾性散乱の微分断面積の比較。陽子が原子核の内部にまで侵入したとしても、核内での平均自由行程は非常に短いという事はないので、かなりの割合で後方にも散乱される。軽い原子核ではラザフォード散乱の断面積よりも大きくなる場合が経験される。クーロン力は軽い原子核では弱いので、それよりも非常に強い核力の影響を受けて弾性散乱されるのだろう。重い (半径が大きい) 原子核の内部にはいると、平均自由行程は原子核の大きさよりも短くなるために、後方に散乱される相対確率も小さくなる。

偏極陽子の ^{40}Ca 原子核により弾性散乱される時の左右の非対称。入射エネルギーが低い場合には、スピン・軌道力はあまり強くないので、微分断面積の角度依存性の小さな差として観測されるが、エネルギーが高くなると、軌道角運動量が大きくなるから、スピン・軌道力も大きくなると考えられる。水平面内を入射陽子は進み、この水平面内に検出器が置かれていると仮定する。エネルギーが高くなると、A_y が後方でほとんど 1 に近くなる理由は、上向きスピンの陽子は、標的原子核に対して右側通行し、左側に散乱される確率が非常に高い事を意味している。これは、スピン・軌道力がスピンと軌道角運動量が平行の場合に引力になる事を意味する。



先にスピンが 1 / 2 の場合の散乱振幅のスピン表示を行った。ここでは、スピンが 1 の場合の散乱振幅のスピン表示を提示しておこう。重陽子の様にスピンが 1 だと、その量子化軸成分が 3 種類あるから、 3 行 3 列の行列となる。

結果だけ書くと、

$$f = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & -D \\ C & -B & A \end{pmatrix}$$

5 個の複素数 (それぞれが散乱角の関数である) で書かれる。ここまでは、パリティー保存からの結論であった。時間反転不変性を要求すると、もう一つの制限がつき、この内の 4 個だけが独立である。通常

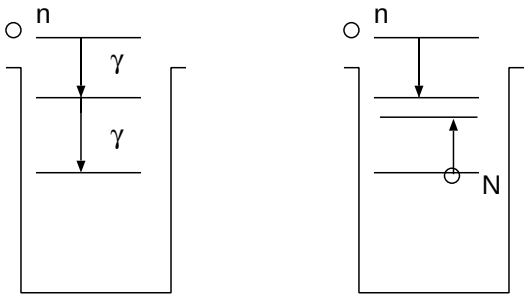
$$C = (A - E) - \sqrt{2}(B + D)\cot\theta$$

という制限をつける。θ は散乱角度である。

この式だけ見ると、核力の効果とクーロン力の効果が入り混じっているように思うかも知れないが、(点電荷に対する) クーロン力の効果は A と E だけに等量ずつ入っている。従って、 5 個の独立量を 4 個の独立量に減らす関係式は核力だけに関係する。

ここでは、複合核過程の話題を提供したい。

E. Fermi は低速の中性子を各種の標的に照射し、放出されるγ 線強度を測定した。(n,γ) 反応と呼ばれる。



左図に示すように、中性子 n が原子核に入射し、原子核の複数の励起状態を経由して基底状態にたどり着く。この過程で余分なエネルギーをγ 線というかたちで放出する。このγ 線放出確率が、標的と中性子のエネルギーに依存して極端に変化した。Fermi はこの現象の説明に苦慮したが、N. Bohr や G.P. Wigner は複合核形成という概念を作り、説明に成功した。

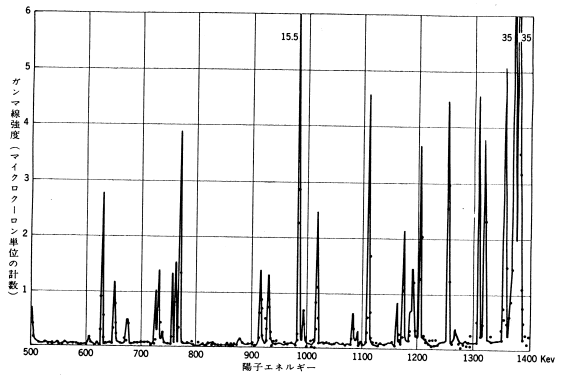
直観的に複合核の概念を説明しよう。

右図では、中性子 n が原子核の高い励起状態に捕まる。しかしこの反応過程では核内の核子 N と直接相互作用し、n のエネルギーが減った分だけ N のエネルギーが増えたとしよう。この状態では、全系のエネルギーは正であるから、この n を吸収した原子核はエネルギー的に不安定である。しかし、 n も N も束縛状態にあるからすぐに原子核の外には出られない。n や N は原子核内をうろつき回る。たまには、原子核内の他の核子と衝突するだろうから、衝突した核子とエネルギーをやりとりする。n が N 以外の核子 P とエネルギーをやりとりする。n は既に束縛状態にあるから、P を原子核の外に押し出すだけのエネルギーを持っていない。n も P もどちらも少しだけ励起された状態になる。N と他の核子の間でもエネルギーがやりとりされると、多くの自由度にエネルギーが拡散される方向に流れるだろう。もしもこの様に、沢山の核子が励起された状態になるならば、原子核は非常に長い間励起状態に留まる。通常は、励起状態にいる核子がγ 線を放出する確率は小さいが、核子が外へ出る事は禁止されたまま、励起状態に留まるならば、γ 線を放出してエネルギー的に安定な状態に遷移する確率は常識的な値よりは大きくならざるを得ない。直観的に言えば、励起状態の継続時間とγ 線放出確率は比例するだろう。非常に小さい確率ではあるが、複数の自由度に分散したエネルギーが一つの自由度にもう一度集められる場合も無きにしもあらずではあろう。

Fermi は、一度多くの自由度に分散されたエネルギーがもう一度一つの自由度に集中するかという問を、当時やっと使えるようになった計算機を用いて数値的に調べた。その結果答えは yes であるとなった。興味があれば、Fermi, Pasta、Ulam の再帰現象というキーワードを調べてみよ。

この現象は、核物理の分野では、 compound elastic と呼ばれている。

重心系でのエネルギーが複合系での共鳴状態を作る場合も考えられる。下の図は、アルミニウム原子核に陽子を照射した時に放出されるγ 線の強度を入射陽子の運動エネルギーの関数として描いてある。



6－2図 陽子エネルギーの関数として表わしたアルミニウムの（p, γ）反応の結果。（Brostron 達[1]）

非常に多くの共鳴の存在を思わせる。この、陽子とアルミニウム原子核の組合せの場合のクーロン障壁は $13 \times 1.44/(1.2 \times 27^{1/3}) = 5$ MeV と計算できる。クーロン障壁を乗り越えて、陽子が原子核の中へ入っている。この陽子がアルミニウム原子核と結合して ^{28}Si 原子核が出来ているのだろうか？この反応は約１１ MeV の発熱反応であるから、エネルギー的には可能である。そうすると、約１２ MeV の励起状態付近の ^{28}Si 原子核を調べている事になる。

中性子と原子核の組合せの場合には、クーロン力に起因する斥力は働かないので非常に低い運動エネルギーの中性子でも原子核反応を誘起する。興味があれば、原研のホームページから GENDRE のデータ集を見ると良い。ウランと中性子との組合せでは、励起状態の数に圧倒されるだろう。

ここでは、低エネルギーでの共鳴散乱を想定して、波動関数の核表面での境界条件と内部情報との関連を主に考える。その後、共鳴とは関係無しに入射粒子が原子核に吸収され、原子核の常識的な時間に較べて、非常に長い時間経過後に新しく粒子が放出されるという近似での粒子放出過程を学ぶ。

S 波近似での散乱長の式から始めよう。共鳴を考えるから、(共鳴付近での狭い範囲のエネルギー依存性のみを考慮するから) 有効相互作用距離 (effective range) の項を無視すると、位相のずれと散乱長は以下の関係にあった。

$$k \cot \delta_0 = -1/a$$

$^1S_0$ の p-n 散乱に関して少し説明したが、共鳴点では 散乱長が発散する。又は $1/a = 0$ で

ある。共鳴点付近での $1/a$ は以下の様にテイラー展開出来よう。

$$\begin{aligned} 1/a &= (E-E_0)\,\frac{d}{dE}\left(\frac{1}{a}\right)_{E=E_0} + (higher\ \ term) \\ &= (E-E_0)\frac{2\,k}{\Gamma_s} + \cdots \end{aligned}$$

ここで、Γ_s はポテンシャル共鳴の幅である。以下の関係式を思い出そう。

$$S = e^{2\,i\,\delta_0}, \quad k\cot\delta_0 = -1/a$$

従って、

$$S = \frac{1 - i\,k\,a}{1 + i\,k\,a}$$

従って、全断面積は中性子に対して次式で書ける。

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2}|1-S|^2 = \frac{4\pi}{|i\,k + 1/a(k)|^2} = \frac{\pi\lambda^2\Gamma_s^2}{\Gamma_s^2/4 + (E-E_0)^2}$$

この式は、全反応断面積が $E = E_0$ でピークを持つ事を示し、先にも記したが、Γ_s はピーク値の半分の σ_{el} を与える全幅になっている。

次に少しこの式を拡張していく。共鳴に幅があるという事を認めると、不確定性関係からこの準位の振幅は時間と共に減衰しなくてはいけない。波動関数の時間依存性は、エネルギーの固有状態では $e^{-i\,E\,t/\hbar}$ であったから、このエネルギーの部分を修正して時間と共に振幅が指数関数的に減衰するように書き換えれば良い。

$$E_0 = \epsilon_0 - i\frac{\Gamma_r}{2}$$

と書くと、振幅の 2 乗は $|e^{-\Gamma_r\,t/\hbar}|$ で減衰する。

即ち、原子核のある種の励起状態の寿命を考慮するという事は、エネルギーを複素数に置き換える事と等価である。すると、散乱長 $a(k)$ も複素数とする必要が生ずる。

$$\frac{d}{dE}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2\,k}{\Gamma_s} + i\,k\,\alpha$$

新しく α というパラメータが導入された。この結果全反応断面積の式は以下の様に書き換えられる。

$$\sigma_{el} = \pi\lambda^2\frac{\Gamma_s^2}{(E-E_r)^2 + (\Gamma_s+\Gamma_r)^2/4}$$

但し、

$$E_r = \epsilon_0 + \Delta, \quad \Delta \equiv \alpha\Gamma_s\Gamma_r/4$$

励起状態に寿命 $(\hbar/\Gamma_r)$ があると、共鳴エネルギーの位置が Δ だけ ϵ_0 からずれている事に注意しよう。この式は Breit-Wigner の 1 準位公式と呼ばれる事がある。

この式では $E = E_r$ を中心として、対称なエネルギー依存性を示すと予想する。実験は非対称を示す場合が多いから、更なる改良が必要である。非対称性を持ち込むには、ポテンシャル散乱の幅 Γ_s と共鳴幅 Γ_r の相対的な位相を考慮する必要がある。

位相の関係を導入する作業をしよう。原子核の表面付近で、内側と外側の波動関数を繋ぐ必要があるが、この接続条件のパラメータとして、原子核の内部条件を取り込んでしまおう。但し、単純化の為に中性子のスピンは無視する。

内部解の接続点 $r = R$ での、無次元化した対数微分を定義する。

$$f_\ell \equiv R\left[\frac{1}{\chi_\ell}\frac{d}{dr}\chi_\ell\right]$$

外部では 内向き (外向き) 波を $I_\ell\,(O_\ell)$ と書くと、$\chi_\ell = I_\ell - S\,O_\ell$ となっているはずである。これに関し、新しいパラメータを導入する。

$$R\frac{1}{O_\ell}\frac{dO_\ell}{dr}\,|_{r=R} \equiv \Delta_\ell + i\,s_\ell, \quad R\frac{1}{I_\ell}\frac{dI_\ell}{dr}\,|_{r=R} \equiv \Delta_\ell - i\,s_\ell$$

更に、I_ℓ と O_ℓ の相対位相を導入する。

$$I_\ell(R) = e^{2\,i\,\xi_\ell}\,O_\ell(R)$$

$r = R$ での内外波動関数の接続条件は次式で与えられる。

$$\frac{R}{\chi_\ell}\frac{d\chi_\ell}{dr}\,|_{r=R-\epsilon} = f_\ell = R\frac{I'_\ell - S_\ell\,O'_\ell}{I_\ell - S_\ell\,O_\ell}\,|_{r=R+\epsilon}$$

この式を S_ℓ に対して解くと、

$$S_\ell = \frac{f_\ell - \Delta_\ell + i\,s_\ell}{f_\ell - \Delta_\ell - i\,s_\ell}e^{2\,i\,\xi_\ell}$$

この式は、先の $S = (1 - ika)/(1 + ika)$ と較べると何処が拡張されているかが分かるだろう。この拡張結果を用いると、部分波 ℓ だけの寄与は

$$\sigma_{el}^{(\ell)} = (2\ell+1)\pi\lambda\!\!\!^{-2}|1 - S_\ell|^2 = (2\ell+1)\pi\lambda\!\!\!^{-2}|A_{res}^{(\ell)} + A_{pot}^{(\ell)}|^2$$

と、ポテンシャル散乱と共鳴散乱の部分に分けられた。

$$A_{res}^{(\ell)} = \frac{-2\,i\,s_\ell}{\Re(f_\ell) - \Delta_\ell + i\{\Im(f_\ell) - s_\ell\}}$$

$$A_{pot}^{(\ell)} = e^{-2\,i\,\xi_\ell} - 1$$

共鳴点よりも幾らかエネルギーが低いと散乱長は負だから、$\sigma^{(0)}$ に置いて、ポテンシャル散乱と共鳴散乱は相殺的に干渉する。

入射粒子と標的との相互作用を二つに分割する。一つは平均で代表される様な部分であり、この部分をポテンシャル散乱と呼んだ。もう一つの部分は平均からかなり離れていて、

標的の特徴的な自由度 (例えば核内の特別のエネルギーを持って運動している核子) との相互作用の部分である。後者を共鳴散乱と呼んだ。

ここでは、ポテンシャル散乱と共鳴散乱を区別したが、potential resonance という概念もある。この場合経験的には幅が上で述べた共鳴よりも広いのが特徴である。

Ramsauer 効果という概念を量子力学の時間に習った事があるだろう。P 波以上の波は散乱にほとんど寄与せず、S 波のみが大きく散乱に関係して、ポテンシャルの空間的な広がりと入射波の波長とで決まるある種の共鳴である。

ある人達は、nuclear Ramsauer effect という言葉も使う。

Barshall による低エネルギー中性子の全断面積の核種およびエネルギー依存性における大まかな構造は、Feshbach, Porter, Weisskopf 達の解釈を経て、原子核反応の概念形成や解析手段に大きな影響を与えた。

共鳴準位に幅があると、共鳴エネルギーがずれる。これは実験値から共鳴点のエネルギーを決定する時に、知っておかねばならない知識のひとつであろう。院生になりはじめの頃に、何かの共鳴現象に関係して、詳しい解析をすると共鳴エネルギーはずれていたという報告を読んで首をかしげた覚えがある。

共鳴に幅があると、共鳴エネルギーがずれる例を古典力学から引用しておこう。速度に比例する抵抗がある場合の固有振動が単純であるだろう。以下の運動方程式から始めよう。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega^2\, x = 0$$

この解は、$x = A\, e^{\lambda_1\, t} + Be^{\lambda_2\, t}$ と書くと、$\lambda_j = -\alpha \pm i\,\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ と与えられる。確かに平方根の中身は、固有振動の角速度 ω ではなく、少し小さな値になっている。

方程式を見れば明らかであるが、この結論は方程式を見ずとも定性的には簡単に見て取れる。当り前の事であるが、速度に比例する抵抗があるならば、速度が大きい部分は抵抗が大きい。振動の高速成分だけ振幅が押えられると考えれば、遅い成分が強調されるのは明らかだろう。

複合核過程

標的核に入射した入射粒子は多くの場合、弾性散乱される。しかしある場合には広い意味での非弾性散乱を引き起こす。この非弾性散乱の場合を考える。

元来、弾性散乱を記述する S 行列は振幅が 1 の内向き波があった時の、外向き波の振幅と位相として定義されていた。もしも内向き波の一部が原子核に吸収されるならば、外向き波の振幅は、確率保存という概念と両立させる必要があるから、1 よりも小さくしなければならない。非弾性散乱が起こるという事は、弾性散乱 S 行列の絶対値が 1 以下になる事と等価であると言える。そこで、$T_\ell = 1 - |S_\ell|^2$ という量を考え、透過係数とか吸収係数と呼ばれる。右辺を見れば、標的に跳ね返されなかった割合という意味があり、これはクーロン障壁 (があるならば) や遠心力のポテンシャルを乗り越えた核内に入り込んだ割合というニュアンスを持たせた時に、透過係数とよび、核内に入り込めばもはや弾性散乱として 2 度と外へ出て来る事は無いだろう思うならば、吸収係数と呼んでもよいだろう。S 行列の位相に関する情報が、絶対値をとる事で消えている点も注意しておこう。

以後の式は、直観的に書き下す。詳しい導き方を確認したい向きは、以下のホームページ

から、nucr.ps(pdf) を参照されたい。$(http://www.tac.tsukuba.ac.jp/\ yaoki)$ ここでは、スピンの影響も無視する。

この節の最初の方に書いたように、核内に入った粒子の平均自由行程は原子核の直径に較べて短いと仮定しよう。この仮定の下では無数の衝突を繰り返すので、入射時に持っていた多くの情報は核内に散逸してしまうと考える。このようにして作られた中間的な束縛状態を複合核と呼ぶ。

先ず複合核が作られる断面積を、弾性散乱波の漸近形の式を参照しながら、評価しよう。

$$\psi \to -\frac{1}{2ikr}\sum_{\ell}\sqrt{4\pi(2\ell+1)}i^{\ell}e^{i\sigma_{\ell}}\{I_{\ell}(r)-S_{\ell}\,O_{\ell}(r)\}Y_{\ell 0}(\theta,\phi)$$

この式を流れの密度の動径方向成分 j_r を計算し、全立体角で積分する。但し、仮定により、内向き波と外向き波の干渉は無視する。

$$\int j_r r^2\,d\Omega = \int r^2\,d\Omega\,\frac{\hbar}{2\mu\,i}\{\psi^*\nabla\,\psi-\psi\nabla\psi^*\} = \frac{\pi\hbar}{\mu\,k}\sum_{\ell}(2\ell+1)(1-|S_{\ell}|^2)$$

この量を入射粒子の波束 $v(=\hbar\,k/\mu)$ で割ると、複合核が作られる断面積が評価出来る。

$$\sigma_R = \frac{\pi}{k^2}\sum_{\ell}(2\ell+1)\,T_{\ell} \qquad T_{\ell}\equiv 1-|S_{\ell}|^2$$

この式を見ると $\pi(2\ell+1)/k^2$ が、部分波 ℓ が見る標的の大きさ、部分波 ℓ の 吸収確率が T_{ℓ} であると読める。

古典力学に登場した衝突径数 b は量子力学では、軌道角運動量にとって変わられる。$\ell\,\hbar = b\times p = b\times\hbar\times k$ である。衝突径数が b と $b+db$ である部分のドーナツ状の面積は $ds = 2\pi\,b\,db$ である。この式に $\ell = k\,b$ を代入すると、$ds = \pi(2\ell)d\ell/k^2$ となる。$d\ell = 1$ とすると、$2\ell\to(2\ell+1)$ の相違を除いて、上の解釈が成立する事が了解出来るだろう。

複合核形成過程の断面積が計算出来たとする。ここで、時間を反転してみよう。T_{ℓ} は入射粒子が本当に原子核の中に入る確率という意味があるならば、それは複合核から、入射粒子と同じ粒子が放出される相対確率でもあるはずだ。入射粒子と放出粒子を識別する為に、ここからは $T_{\ell}(a)$ という様に $a,\ b$ という記号を追加しよう。

入射粒子を a、 放出粒子を b とする反応の断面積は a という入射粒子が複合核を作り、この複合核が粒子 b を放出すると考えると、

$$\sigma(a\to b) = \frac{\pi}{k_a^2}\sum_{\ell}(2\ell+1)T_{\ell}(a)\times\frac{T_{\ell}(b)}{\sum_c T_{\ell}(c)}$$

と書けるだろう。ここで、右辺の最後の因子が、複合核が崩壊する全ての粒子放出確率に対して和をとったものが分母に登場している。

又、入射粒子が軌道角運動量 ℓ を標的核に持ち込んだ時、複合核のスピンは ℓ である事が仮定されている。

放出粒子 b がどの方向に沢山放出されるかという問題にも答える事が可能である。(透過係数 $T_\ell(a), T_\ell(b)$ 等は与えられていなければならない) 先に流れの密度を計算して、全立体角で積分したが、積分する前の式が方向の情報を持っているから、この段階の式を書けばよい。

$$\frac{d\sigma(a \to b)}{d\Omega_b} = \frac{1}{4\,k_a^2} \sum_\ell (2\ell+1)^2 \frac{T_\ell(a) T_\ell(b)}{\sum_c T_\ell(c)} \times \sum_L < \ell\,0\,\ell\,0|L\,0>^2 P_L(\cos\theta_b)$$

右辺の第 2 の L についての和は、角運動量の合成に関する Clebsch-Gordan 係数を含むが、パリティーの保存則を含むから、偶数の L だけに制限される。偶数という制限は、陽子・陽子散乱でも登場したが、角度分布が９０度対称になるという制限となる。

複合核形成過程を経由する微分断面積が９０度対称となる直観的な理由を考えておこう。入射粒子の進行方向が z 軸である。従って反応前の座標系には方向が一つしか無い。勿論この z 軸に関して現象は回転対称である。もしも複合核がどのようにして作られたか？という記憶を忘れたと仮定する。この記憶喪失は、ビームの進行方向を忘れるという事と等価である。０度と１８０度の区別が出来なければ、９０度対称という結論は不思議でない。

この様な状況で保存する物理量は何か？と言う事を考えれば、それは角運動量であるという答えが登場する。入射粒子が z 軸に平行という事は、入射粒子の運動量が z 軸に平行、従って軌道角運動量は z 軸に垂直という事である。即ち、$\ell_z = 0$ というのが、反応を通じて保存される物理量である。この保存則を満たしながら、複合核が崩壊すると考えれば良い。

ここでは、射影演算子、に着いて簡単に触れたあとで、直接反応の話題をいくらか提供する。

射影演算子

先ず簡単な例を幾らか与えよう。

位置ベクトル $\mathbf{r}$ とデカルト座標系での基本単位ベクトル $\mathbf{e}_i$ (i=1,2,3) を考える。この時、$\mathbf{r}$ の i 成分は $(\mathbf{r}, \mathbf{e}_i)$ とかけるから、

$$\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_i, \mathbf{r})$$

という恒等式が成立する。$p_i \equiv \mathbf{e}_i \cdot$ と書いたとすると、p_i は任意のベクトルに演算する事が出来て、そのベクトルの第 i 成分を取り出す演算子であると見る事が出来る。$P_i = \mathbf{e}_i\, p_i$ をこの目的の演算子と考える事も可能である。

なを、以下の恒等式が成立する。$\sum_i P_i = 1$

但し、右辺の 1 は数字の 1 ではなく、恒等変換を表す。

ジアドとか diadics という概念も興味があれば勉強してみよ。

フーリエ展開を用いた例。 物理屋がいう素直な角度の関数 $f(\theta)$ の Fourier 展開を考えよう。

$$f(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, \cos(m\,\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} b_n\, \sin(m\,\theta)$$

展開係数は次式で与えられる。

$$a_m = \frac{1}{(1+\delta_{m,0})\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\cos(m\,\theta)\,d\theta, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\sin(m\,\theta)\,d\theta$$

上の Fourier 展開を以下の様に書いてみよう。

$$f(\theta) = \sum_{m\,i} t_m^i(\theta)(t_m(\theta),\, f(\theta))$$

但し、非負の数 m を用い

$$t_m^i(\theta) = \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi} & if \;\; (m = \;\; i = 0) \\ \cos(m\theta)/\sqrt{\pi} & if \quad i = 0 \\ \sin(m\theta)/\sqrt{\pi} & if \quad i = 1 \end{cases}$$

更に、この場合の ‘内積’ の定義は

$$(t_m^i,\, f(\theta)) = \int_{-\pi}^{\pi} t_m^i(\theta)\, f(\theta)\, d\,\theta$$

である。
この場合にも

$$P_m^i = t_m^i(\theta)\int_{-\pi}^{\pi} d\,\theta\, t_m^i(\theta)$$

と定義すると、$\sum_{i\,m} P_m^i = 1$ が成り立つ。
球面調和関数による展開。極角 θ と方位角 ϕ の関数 $g(\theta,\,\phi)$ を球面調和関数 $Y_{\ell,\,m}(\theta,\,\phi)$ で展開する例を取り上げよう。

$$g(\theta,\,\phi) = \sum_{\ell,\,m} Y_{\ell,m}(\theta,\phi)(Y_{\ell,m}(\theta,\phi),\, g(\theta,\phi))$$

但し内積は次式で定義される。

$$(Y_{\ell,m}(\theta,\phi),\, g(\theta,\phi)) = \int_0^{2\pi} d\,\phi \int_0^{\pi} d\theta Y^*(\theta,\phi)\, g(\theta,\,\phi)$$

今度は、内積の定義に複素共役が登場する。最初のベクトルの例でも内積を作る時に、ベクトルの転置と言う概念が使用されていた。もしも共変と反変ベクトルの区別を知っていれば、少し深い理解が出来るだろう。
ここで、

$$p^{\ell,\,m} = Y_{\ell,m}(\theta,\phi)(Y_{\ell,m}(\theta,\phi),\, ??)$$

とおくと、$p^{\ell,m}$ という演算子は $\theta\,\phi$ の関数 $??$ に掛かるとその角運動量成分が $\ell,\, m$ である部分を引っ張り出す。

これらの例で分かる様に、ある対象に作用して、その対象の内のある性質を有する部分だけを取り出す演算子を射影演算子と呼ぶ。射影演算子は、対象のある側面だけを考慮する時に、非常に便利な概念である。

少し抽象化するために、Dirac のブラとケットという記号を使用する。有限個の状態を想定する。具体性を与えるために二つの状態 $|1>,\ |2>$ で完全系をはっているとしよう。任意の状態 $|a>$ は以下の様に展開できる。

$$|a>=|1><1|a>+|2><2|a>$$

展開系数、$<1|a>,\quad <2|a>$ は二つの状態ベクトルの内積であるが、上の展開を $|1><1|,\quad |2><2|$ が状態 $|a>$ にかかる演算子であるとも解釈できる。後者の解釈では、これらの演算子は状態 $|a>$ に含まれる $|1>$ 成分と $|2>$ 成分を取り出すと理解できる。

次に有限個という状態に対する制限を取り除こう。ある演算子の固有状態の数は加付番無限個であるとし、この演算子の固有値を i という記号で区別しよう。$|i><i|$ は、何かある状態に作用し、その $|i>$ 成分を取り出す演算子である。固有値 (スペクトル) の一部はが属する部分に I という名前を付けたとき、

$$P_I=\sum_{i\in I}|i><i|$$

は I に含まれるある成分を取り出す演算子という意味を持つ。更に、J を全スペクトルとすると

$$\sum_{i\in J}|i><i|=1$$

という恒等式が成立する事も理解できるだろう。

$$Q_I\equiv 1-P_I$$

は、I というスペクトルを持たない部分を取り出す射影演算子と言える。Q_I と P_I とは相補的な関係にある。

$$P_I^2=P_I,\quad Q_I^2=Q_I,\quad P_I\,Q_I=Q_I\,P_I=0$$

といった関係式が成立する。

核子の弾性・非弾性散乱

A 個の核子からなる標的核を核子で照射する場合を想定する。弾性散乱や非弾性散乱がおこる。核子移行反応も起こるだろう。A 個の核子からなる標的核の内部自由度に対応したハミルトニアンを H_A、その固有値と固有関数を $E_i,\ \phi_i$ とする。

$$(H_A-E_i)\phi_i=0$$

入射核子 N の運動エネルギーを T、N と核内の j 番目の核子との相互作用ポテンシャルを V_{jN} とする。N と標的核全体との相互作用ポテンシャル V は、この相互作用の和で表せるだろう。

$$V = \sum_j V_{jN}$$

N と標的核の相対運動波動関数を χ^i とすると、全 ハミルトニアン H と全波動関数 Ψ とは次の様に書けるだろう。

$$H = T + V + H_A, \quad \Psi = \sum_i \chi^i \phi_i$$

$$H\Psi = (T + V + H_A)\Psi = E\Psi$$

この式を二つの方法で書き直してみよう。その結果、有効相互作用、チャネル結合という二つの見方が導かれる。

有効相互作用

直前に書き下した Schrödinger 方程式で、$\Psi = (P + Q)\Psi$ と書き換えてみる。但し、P は全系のエネルギースペクトルの内のある部分、極端な場合には弾性散乱する状態だけ、を取り出す射影演算子であり、$Q = 1 - P$ である。極端な場合には、弾性散乱以外の全ての状態を取り出す演算子が Q である。しかし、当面はこの様には限定しない。

左から、P や Q を掛け、$P^2 = P,\ Q^2 = 1,\ PQ = QP = 0$ といった恒等式を利用すると、$\Psi_P \equiv P\Psi,\ \ \Psi_Q \equiv Q\Psi$ に対して、次の関係式が導ける。

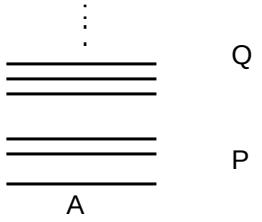
$$T\,\Psi_P + V_{PP}\Psi_P + V_{PQ}\Psi_Q = E_P\Psi_P$$

$$T\,\Psi_Q + V_{QQ}\Psi_Q + V_{QP}\Psi_P = E_Q\Psi_Q$$

ここで、簡単の為に $V_{PP} \equiv PVP$ 等の記号を使用した。又、運動エネルギー T は、標的核の内部座標とは独立であるから、標的核の状態に対する射影演算子とは交換可能である。最後の式を Ψ_Q に対して形式的に解くと、

$$\Psi_Q = -\frac{1}{T + V_{QQ} - E_Q}\,V_{QP}\,\Psi_P$$

この式の意味は通じ難いかも知れない。



図で見ると、標的 A の基底状態と低い励起状態を含めたものが P で取り出される状態であり、残りの全ての状態が Q に対応する。右辺の一番右側に登場するのは Ψ_P であるから、標的核の基底状態又は低い励起状態に対応する波動関数 ϕ_i とこの状態を励起した核子の運動に対応する相対運動波動関数 χ^i の積を考えている。この状態に V_{QP} が作用すると、状態 P から状態 Q への遷移が起こる。その後、分母に運動エネルギーやポテンシャルが含まれた演算子 (実はグリーン関数と呼ばれる) が作用し、(この演算子は Q を含むから) 状態 Q の内部を漂う。この様な状態が Ψ_Q であると言っている。

(1) 分母に演算子を含む演算子は見掛けないかも知れない。$(1/X)\,\psi = \phi$ と書いたとすると、演算子 $(1/X)$ が ψ に作用するとは、演算子 X を何かある状態 ϕ に作用させた時、その結果が ψ になるような (即ち、$X\,\phi = \psi$) ϕ を作る演算子の事である。

X や ψ を具体的に与えても、$1/X$ や ϕ が計算できるという保証がある訳ではない。もっと言えば、$1/X$ は発散するかも知れない。従って、このグリーン関数による表現は単なる形式解だと思っておけば良い。

(2) グリーン関数は、演算子を与えると自由度なく決まるという訳ではない。後で例示する予定であるが、自由度が残っている。この自由度を殺すために、どのような境界条件に対応するグリーン関数であるかを指定する。

今の場合、P 状態には内向き波と外向き波が存在するが、Q 状態には外向き波しか存在しない。励起状態を標的にした散乱実験は出来ないからである。この境界条件を指定するために、E_Q の部分を $(E_Q + i\,\epsilon)$ と書く。ϵ は無限小の量であり、適当な時に 0 の極限をとる。

さて、形式解を用いて、 Ψ_Q を消去すると、

$$(T + \mathcal{V}_{PP})\Psi_P = E_P\,\Psi_P$$

$$\mathcal{V}_{PP} = V_{PP} - V_{PQ}\frac{1}{T + V_{QQ} - E_Q - i\,\epsilon}V_{QP}$$

という Ψ_P に関する方程式を得る。$\mathcal{V}_{PP}$ は等価ポテンシャルと解釈出来る。この方程式は、見掛け上 Q を含まず、Q の効果は全て等価ポテンシャルに押し込めてしまった。

この等価ポテンシャルの中には、多くの散乱状態からの寄与が含まれている。散乱状態に対応するグリーン関数は虚数を含むから、等価ポテンシャルは、複素数になる。状態 P から状態 Q へ一部の流束が流れ、状態 P だけでは確率の保存が成立しないから、ポテンシャルが複素数になると考えてもよい。

グリーン関数は二つの座標の関数であり、一方の座標変数に対する積分も含んでいた。即ち、等価ポテンシャルの第 2 項からの寄与は、以下の様な項を含む。

$$\int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Psi_P(\mathbf{r}')$$

これまでに学んで来たポテンシャルの代表として水素原子の問題を思い出すと、ポテンシャルは $V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})$ という形でしか登場しなかった。即ち、現在考えている点 $\mathbf{r}$ だけが登場した。この様なポテンシャルを局所的ポテンシャルと呼ぶ。ここに登場した等価ポテンシャルでは、今考えている点 $\mathbf{r}$ 以外の点 $\mathbf{r}$' の波動関数の値が、積分を通じて、影響を与える。

極端な表現をすると、問題が解けないと、積分が実行出来ないから、問題が確定的に決まらないという厄介な事になっている。この様なポテンシャルを非局所ポテンシャルという。この非局所ポテンシャルの問題を解く一つの方法は、逐次近似により内部矛盾が無くなるまで繰り返して解を改良する。もう一つのやり方は、解を既知の直交関数系で展開し、展開係数に関する代数方程式に持ち込む事だろう。

非局所ポテンシャルを無理矢理に局所ポテンシャルで近似する事は可能であるが、その時には、近似した局所ポテンシャルはエネルギーに依存する事が知られている。

この様に解釈される有効ポテンシャルを光学ポテンシャルであると解釈する。

標的核には無数の励起状態が存在する。それを、無理矢理に、有限個の状態 P だけの問題にすり替えてしまった。その結果、ポテンシャルが等価ポテンシャルになったと見る事ができる。無数の状態との相互作用の効果を少数の状態だけの問題に繰り込むのに、質量が変わるという見方をする場合もある。物性系の教科書に頻繁に登場する。質量に押し込むか、ポテンシャルに押し込むかは好みの問題であると考えておけば良いだろう。

原子核物理でも、有効質量という概念を持ち込む人がいる。例えば、今の核子の散乱問題では、核子が原子核の内部に入ると有効質量は約７０％程度に軽くなり、標的核の表面付近では約 ４ ％程度重くなる事が知られている。

核内で軽くなるのは Pauli 効果のためであり、表面付近では、核内核子との間の引力の為に、核子が動き難くなる効果である。

核子光学ポテンシャルの具体的な例として、以下の二つを引用しておこう。

R.L. Varner, Phys. Rep. 201(1991) 59

A.J. Koning and J.P. Delaroche Nucl. Phys. A713 (2003) 231

チャネル結合の方法

状態 P だけの方程式を考える。但し、有効相互作用は局所的なポテンシャルで近似出来たとする。P 空間に含まれる励起状態の数を M としておく。$\Psi_P = \sum_{i=1}^{M} \chi^i \phi_i$ と展開できたとし、左から ϕ_j を掛け、H_A の固有状態の規格直交性を使用すると、相対運動の波動関数に対する以下の連立方程式を得る。

$$\forall i, \qquad (T + \mathcal{V}_{ii} - E_i)\chi^i = -\sum_{j \neq i} \mathcal{V}_{ij}\chi^j$$

但し、

$$\mathcal{V}_{ij} = < \phi_i | \mathcal{V}_{PP} | \phi_j >$$

は有効ポテンシャルの行列要素である。この方程式では散乱過程で、状態 ϕ_i から ϕ_j への無限回の行き来を取り入れた事になる。通常の ボルン近似では、相互作用が弱いために、1回だけ遷移が起こるとしていたのと対称をなしている。この方程式を、適当に仮定した (又

は他の実験データと矛盾しないように決められた) 有効ポテンシャルを用いて解けば、散乱問題は解けた事になる。

遷移の原因となる相互作用を摂動と考えて、必要ならばその次数を上げて散乱振幅を評価するという手法が考えられたが、それでは対処出来ない時に、このようなチャネル結合の手法が有効となる。この手法は元々は、不活性ガス原子を標的とした低エネルギー電子の散乱現象の研究から生まれた手法である。

原子核の非弾性散乱、特に変形核と呼ばれる軟らかい原子核を対象とした非弾性散乱に対してはこの手法が有効である事が分かっている。一方、入射粒子が核子でなく重陽子の様な複合粒子であり、なおかつ、その結合エネルギーが小さい場合には、入射粒子が簡単に散乱 (非束縛) 状態に励起される事も考慮する必要がある。この入射粒子の分解過程にもこのチャネル結合法は利用されている。個人的には、この状態数 M が ３００程度の場合を PC で解いている。

２次のボルン近似や、この分解過程へのチャネル結合法の導入は、原子核反応分野に於いて、日本が世界をリードした研究である。

１次の摂動と DWBA

P 空間として、標的核の基底状態を含む状態 (状態 １) とこれとは独立は状態 (状態２) のみを取り上げよう。更に、両状態を繋ぐ行列要素 V_{12} は対角要素 $V_{11},\ V_{2,2}$ に比較して、その絶対値が充分に小さいと仮定しよう。その時、先のチャネル結合方程式は以下の二つになる。

$$(T + V_{11} - E_1)\,\chi^{(1)} = -V_{12}\,\chi^{(2)}$$

$$(T + V_{22} - E_2)\,\chi^{(2)} = -V_{21}\,\chi^{(1)}$$

弾性散乱の計算をしたいならば、上の $\chi^{(1)}$ に関する方程式を解けばよいし、(広義の) 非弾性散乱を計算したいならば、両者を考慮しなければならない。非対角要素の１次の摂動だけを取りいれるという近似を考えるならば、$\chi^{(2)}$ が如何にして作られるかを考えれば良いから、先ず右辺の $\chi^{(2)}$ を無視して $\chi^{(1)}$ の方程式を解き、この $\chi^{(1)}$ を $\chi^{(2)}$ の方程式に代入する。この $\chi^{(2)}$ に関する方程式は非線形の方程式であるから、グリーン関数の手法を用いて解く事が出来る。即ち、右辺をδ 関数で置き換えた方程式を先ず考える。

$$(T(\mathbf{r}) + V_{22}(\mathbf{r}) - E_2)\ G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

この方程式を解くには、先ず $\chi^{(2)}$ を球面調和関数で展開し、３次元の問題を１次元の問題に置き換える。大まかな説明に留めるために、スピンを無視する。規格直交化された関数 $Y_{\ell\,m}$ から δ 関数を作る方法は既知とし、

$$G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\ell m} \frac{\chi_\ell^{(2)}(r)}{r\,r'}\, Y^*_{\ell,m}(\hat{\mathbf{r}}')Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{r}})$$

簡単の為に、ポテンシャルの行列要素 V_{ij} は全て r だけの関数だと仮定しておこう。その結果、以下の $G_\ell^{(2)}(r)$ に関する方程式を得る。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left\{\frac{d^2}{d\,r^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right\}+V_{22}-E_2\right]G_\ell^{(2)}(r,r')=\delta(r-r')$$

この方程式は、1) 折れ線関数を微分すると階段関数が得られる。 2) 階段関数を微分するとδ 関数が登場するという事を知っていると簡単に書き下せる。

グリーン関数を作る方針は、結局以下の様になる。

1) $r\neq r'$ では、δ 関数は 0 で置き換えて良いから、斉次方程式の二つの独立解 $f_\ell(r),\ g_\ell(r)$ を用意する。

2) 上の二つの解を組合せ、$r=r'$ で連続ではあるが、折れている様な解を作る。

$$G_\ell(r,r')\propto f_\ell(r_<)\,g_\ell(r_>)$$

ここで、$r_>$ という記号は、r と r' の内の小さい方という意味である。

3) 2 階微分が丁度δ 関数になるためには、 1 階微分が $r=r'$ で丁度 1 だけ変化しなければいけない。

$$lim_{\epsilon\to 0}\frac{dG_\ell(r,r')}{dr}|_{r=r'+\epsilon}-\frac{dG_\ell(r,r')}{dr}|_{r=r'-\epsilon}=1$$

となるように比例定数を決定する。これには、Schrödinger 方程式を用いて導ける、以下の Wronskian に関する知識が役に立つ。

$$\frac{d}{dr}W(r)=\frac{d}{dr}\{f'_\ell(r)\,g_\ell(r)-f_\ell(r)\,g'_\ell(r)\}=0$$

ここでダッシュ (‘) は r に関する微分を表す。即ち、$W(r)=\{f'_\ell(r)\,g_\ell(r)-f_\ell(r)\,g'_\ell(r)\}=W$ は r に依存しない定数である。$r\to\infty$ となるところで (漸近形を用いて) 評価すれば良い。

故に、以下の様に決定できた。

$$G_\ell(r,r')=\frac{2\mu\,W}{\hbar^2}\,f_\ell(r_<)\,g_\ell(r_>)$$

上のグリーン関数は、$f_\ell,\ g_\ell$ が、斉次方程式の独立な解と言う以外に条件がついていないので、未だ物理的な条件を満足するとは限らない。散乱実験では、状態 1 に対応する波動関数には、振幅が 1 の平面波に対応する内向き波と外向き波が含まれていて、状態 2 に対応する解は、内向き波を含まずただ外向き波だけがある。

上で計算されたグリーン関数の範囲では、

$$\chi_\ell^{(2)}(r)=\int^r dr'\{-V_{12}(r')\chi_\ell^{(1)}(r')\}\,\frac{2\mu\,W}{\hbar^2}\,f_\ell(r_<)\,g_\ell(r_>)$$

と表現された。この式で $r \to \infty$ とした時の漸近形が $O_\ell(r) = G_\ell(r) + i\,F_\ell(r)$ と外向きのクーロン波動関数になるためには、$g_\ell(r_>) \propto O_\ell(r)$ と選んでおけば良い。$f_\ell(r)$ は内向き波を含んでおれば g_ℓ とは独立であるから、$\chi^{(1)}$ と同じ境界条件を満足する様に選んでおけば良い。

この結果、以下の様な表現がよく使用される。

$$T = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int \chi^{(2)^*}\, V_{21}\chi^{(1)} dr$$

ポテンシャルの対角要素、V_{ii} は弾性散乱の実験値を再現する様に、選ばれる場合が多い。この様なポテンシャル (の対角要素) は光学ポテンシャルと呼ばれる。この光学ポテンシャルを用いて相対運動波動関数 χ を作り、非対角要素の 1 次の摂動で散乱振幅を計算する手法は DWBA (Distorted wave Born Approximation、歪曲波ボルン近似) と呼ばれ、原子核反応を記述する最も有用な手法と考えられている。歪曲波という単語は、通常のボルン近似では平面波を使うかわりに、光学ポテンシャルで歪められた波を使用するところから付けられた名前である。

先に導いた、チャネル結合の方程式を 2 次以上の高次まで解く事もやられている。しかし摂動展開が収束するという保証は与えられていない。

2 次迄の DWBA 計算のプログラムは日本で開発され、ある時期に世界を風靡した。そのプログラム (TWOSTP/TWOFNR) は以下の僕のホームページから詳細な解説付で download 出来る。

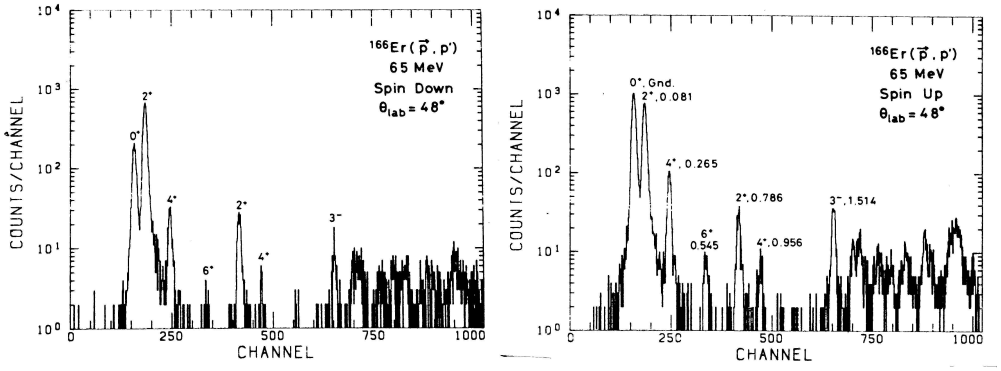
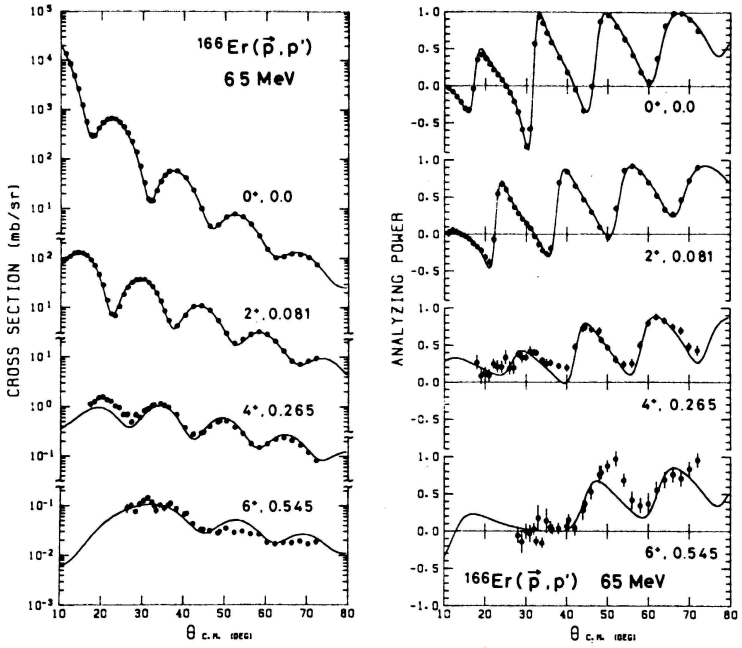


Fig. 9 Typical position spectra of the focal plane counter for the ^{166}Er(p,p') reaction at 65 MeV.

図は、変形核として知られている (従って、第 1 励起状態のエネルギーが平均的な原子核と較べると小さく、弾性散乱と非弾性散乱の区別が難しい) ^{166}Er 原子核を標的とした 65 MeV 陽子の弾性・非弾性散乱の運動量スペクトルである。(エネルギースペクトルと似たようなものである)。左右の図は、散乱角は等しいが、入射陽子のスピンに向きが異なっている。左の図では、弾性散乱の強度の方が第 1 励起状態に対応する非弾性散乱の強度よりも低

いが、右の図では逆転している。縦軸が対数メモリになっている事に注意せよ。



上の実験データに対応する微分断面積とベクトル分析能 (vector analyzing power) の実験値と計算値。計算は、図示した 4 本の準位を P 状態だと仮定して、チャネル結合の連立微分方程式を解いている。非弾性散乱に対応する原子核状態がどの程度球形からずれているかといった内容のパラメータを含んだ計算となる。

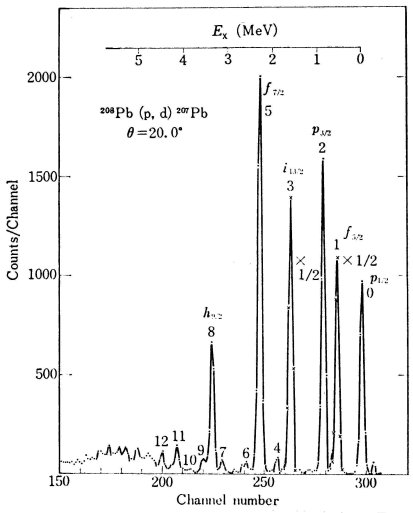


Fig. 1 A deuteron spectrum in the ^{208}Pb(p, d)^{207}Pb reaction at E_p=52 MeV.

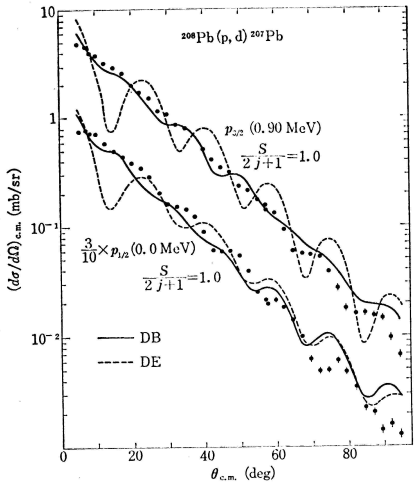


Fig. 3 (a) Differential cross sections of the ^{208}Pb(p,d)^{207}Pb at E_p=52 MeV. Solid curves are due to the DB analysis and broken curves to the DE analysis. The r_{0n}=1.25 fm is used.

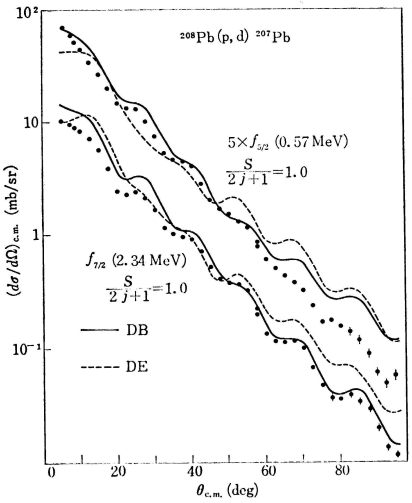


Fig. 3 (b) Differential cross sections of the ^{208}Pb(p,d)^{207}Pb at E_p=52 MeV. Solid curves are due to the DB analysis and broken curves to the DE analysis. The r_{0n}=1.25 fm is used.

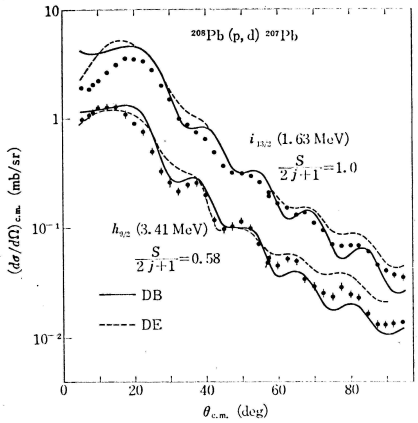


Fig. 3 (c) Differential cross sections of the ^{208}Pb(p,d)^{207}Pb E_p=52 MeV. Solid curves are due to the DB analysis and broken curves to the DE analysis. The r_{0n}=1.25 fm is used.

^{208}Pb を標的とした 52 MeV 陽子による (p,d) 反応の例。左上の図が２０度に放出された重陽子の運動量スペクトル。鉛原子核は硬いので、原子核の周辺部を周回している中性子を入射陽子が取り上げて、重陽子が作られると考える。中性子の周回軌道に対応する６本の準位が選択的に例起されていると考えられる。他の３枚の図は、DWBA 法での微分断面積の計算値と実験値の比較である。２本の計算値があるが、重陽子の束縛エネルギーが小さい事を考慮した補正を光学ポテンシャルにする必要がある事を示している。実験値によくあっている方が、補正を施した計算結果である。