何年も前に青木が筑波大学 物理学研究科の 1 年生を対象として行ったイオン光学の講義ノートの前半を、当時社会人院生として受講した、加速器センター技官の 大島君が tex に入力してくれた。これはそれにいくらか手をいれたものである。

磁場及び電場の概算

先ず、運動エネルギー T , 質量 m , 電荷 q の荷電粒子が一様磁場 B 又は円筒電場 E を与えた時に描く円運動の軌道半径を評価する。

磁場

一様磁場中で、磁場に垂直な面内ではイオンの軌道は円である。その軌道半径 a_M は、遠心力と Lorentz 力とのつりあいを考慮すると決定できる。

$$qvB = \frac{mv^2}{a_M} \qquad a_M = \frac{mv}{qB} \propto p \tag{1}$$

曲率半径は運動量 p に比例する。

$q = 1.6 \times 10^{-19}$ C , T $= 1$ MeV の陽子の 1.5 Tesla の磁場中での軌道半径 a_M は

$$a_M = \frac{p\,c}{q\,B\,c} = \frac{\sqrt{2 \times 938 \times 1} \times 10^6\,[V]}{1.5\,[T] \times 3 \times 10^8\,[m/s]} = 9.63\,cm \tag{2}$$

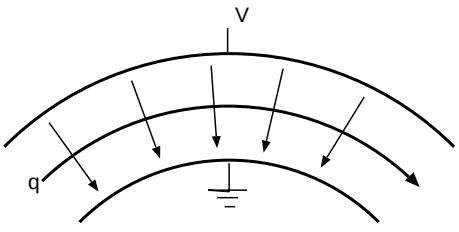
エネルギーが 1 keV 以下程度の領域での電子軌道を制御するのに磁場を用いる事は少ないと思う。このエネルギー領域での、磁場の最大の用途は、電子軌道長を伸ばす事だろう。例えば、高真空を実現する為のイオンポンプ、冷陰極放電型の真空ゲージがある。エネルギーが更に低いと、地磁気を考慮しなければいけないから、精度を要求する測定に磁場を利用するのは不利になるだろう。

エネルギーが高くなると、ほとんど磁場の独壇場となる。一番大きな曲率半径の人工磁場は加速器に於いて実現されている。

太陽風と地磁気を取り上げると、地球規模の曲率半径を与えている場合もある。勿論、宇宙線の最大エネルギーに関して、宇宙規模の曲率半径を考える人もいる。

電場

図の様な円筒電場を想定する。



エネルギーの関係式

$$\frac{mv^2}{2} = T \tag{3}$$

と遠心力と引力のつりあい

$$\frac{mv^2}{a_E} = qE \tag{4}$$

より，

$$a_E = \frac{2T}{qE} \propto v^2 \tag{5}$$

曲率半径 a_E はエネルギー T に依存し質量や運動量によらない。

例えば、

$q = 1.6 \times 10^{-19}$ C, T= 1 MeV, E= 1 kV/mm ならば $a_E = 2$ m となる。

a_E は v^2，a_M は v に比例するので，エネルギーの高い粒子を曲げるのには磁場が用いられ，エネルギーの低い粒子には電場が用いられることになる。

記憶の範囲では、バンデグラフ型の加速器に曲率半径が 1 m 程度の電場方式のエネルギー分析器が用いられた事がある。大型の質量分析器でも電場の曲率半径も数メートル程度が最大であろう。高エネルギーの円形粒子加速器のビーム引出し電場の曲率半径はもう少し大きいと思う。直流の高電圧を真空中で維持するのは、一般的に非常に困難である。

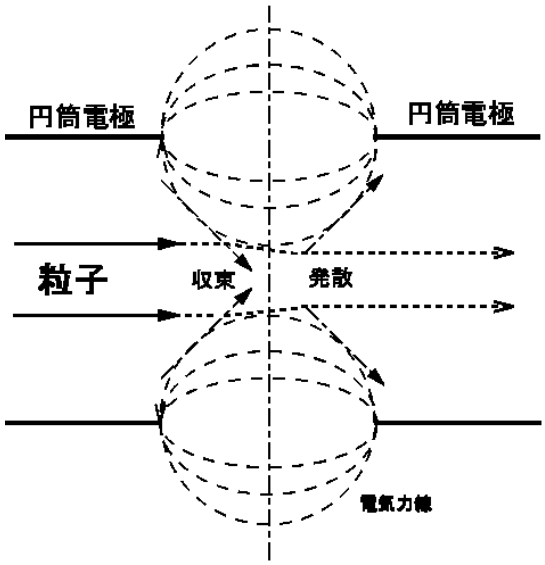
TV のブラウン管では、磁場が走査線の駆動に使用されるが、多くのオシロスコープでは電場が使用される。多分真空内部に置く部品の数を減らしたいのだろう。

磁場は運動量、電場は運動エネルギーに関係して使用される。例えば質量分析器や、原子核反応生成物からの粒子識別の為には、両者を併用する必要がある。

Einzel lens

軸対称電場での加・減速に伴う収束性を、図を見ながら、定性的に考える。

入射してくる粒子の電荷をマイナス，空間的な広がりの程度を半径 r とし，向かって左側の電極より右側の電極により高いプラスの電圧を掛けるものとする（粒子を加速する）。円筒電極間のギャップの中点を中心として，電場を左半分と右半分に別け粒子の運動を考える。

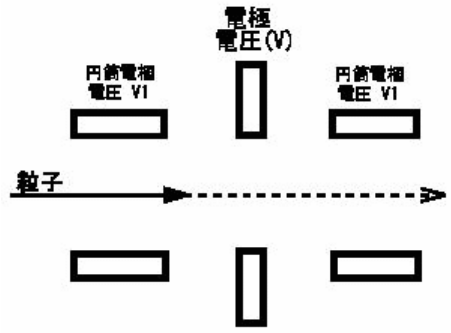


まず，この円筒座標系において粒子の r 座標はほとんど変化がないものとすると，粒子がこの電場を通過する際、電場の左半分で受ける収束力と右半分で受ける発散力は等しい。一方，電場を通過するのに要する時間は，加速系では電場の左半分の通過にかかる時間より右半分を通過する時間は短くなるため左右で非対称となる。この結果 r 方向の運動量の変化，すなわち力積は左半分の効果の方が大きくなり、 r 方向の収束性を持つことになる。ここで，粒子が左半分で受ける収束力により粒子の r 座標が影響を受けることを考慮すると，右半分での r 座標は左半分の r 座標より小さいので，E_r も右半分（発散性）の寄与の方が小さく、より収束に効いてくることになる。

つまり，電荷がマイナスで半径 r の広がりを持っている粒子流が，上図の円筒電場を通過する際，電場の左半分と右半分で受ける収束力と発散力を受ける。電気力線の接線方向はプラスの電荷に対して働く力の方向であるから，マイナスの電荷を持つ粒子はその逆方向の力を受けることになり，左半分で収束，右半分で発散の力を受ける。しかし，粒子は電極間で加速されるため左半分を通過する時間より右半分を通過する時間が短く，粒子は左半分でより長い時間、力を受ける（収束性力積 > 発散性力積）ことから，最終的に収束する方向の力積を多く受けることになる。また，電場を通過する粒子流の r 座標はほとんど変化がないとする条件をはずしてみると，左半分の収束力により粒子流の半径 r は小さくなり，右半分に入るため発散力の影響は小さくなり，結果的に収束力が強く効くことになる。通常の幾何光学のセンスで言うと、凸レンズと同じ作用である。ここに、イオン光学という名前が使われる理由の一端がある。

粒子が減速される場合でも同様に収束作用がある事がわかる。

円筒電場によるレンズはその副作用としてイオンのエネルギーが変化してしまう。また，充分な収束力を得るのに高い電圧が必要であったりする。この二つの欠点を除くために，加減速を組み合わせてこれで 1 つのレンズ作用を持たせた物が Einzel lens である。加速管のようなサンドイッチ状の電極で，真ん中の電極に電圧をかける。レンズの構造としては厚くなるが，収束力は 2 倍になるので必要な電圧は減少し，粒子の運動エネルギーは出入り口で同一となる。このレンズでは電極にかける電源電圧が 1 つだけあればよいので unipotential lens とも呼ばれる。



軸対称電場の加減速に対する収束作用　→　**Einzel lens**

i) 収束性場と発散性場の通過時間に差がある

ii) 前半で収束作用を受けて r 方向に変位すると，後半の発散作用は前半より弱くなる（加速レンズ）又は前半で発散作用を受けて，後半の収束作用は前半より強くなる（減速レ

ンズ）

軸対称電場の取扱

定量的な取り扱いは，電場の計算ができないので難しい。境界条件を与えないと場は決まらないから，近軸光線のみが重要であるとして Z 軸 (イオンの進行方向) 上の電位分布 $\Phi(z)$ を与え，potential を r の級数に展開する。円筒対称性を仮定し、円筒座標系を使用する。potential ϕ は角度 θ に依らない。又，同じく回転対称性より Z 軸上では電場は Z 軸方向成分しか持ち得ない。即ち、$\partial\phi/\partial r)_{r=0} = 0$ であるから、

$$\phi(r,\theta,z) = \Phi(z) + \frac{r^2}{2!}\frac{\partial^2\phi(0,\theta,z)}{\partial r^2} + O(r^3)$$

この式を r で微分すると，

$$\frac{\partial\phi(r,\theta,z)}{\partial r} = r\frac{\partial^2\phi(0,\theta,z)}{\partial r^2} + O(r^2)$$

ϕ を $O(r^2)$ まで近似したら，$\dfrac{\partial\phi}{\partial r}$ は $O(r)$ まで近似しておけばよい。

これをもう一度微分すると

$$\frac{\partial^2\phi(r,\theta,z)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2\phi(0,\theta,z)}{\partial r^2} = \text{一定}$$

ϕ で $O(r^3)$ を無視したから当然である。

さて，一方 Laplace eg. より

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\phi(r,\theta,z) = 0 \tag{6}$$

この両者により，$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ が近似的に成立する。

故に、

$$\phi(r,\theta,z) = \Phi(z) - \frac{1}{4}\Phi''(z)\cdot r^2 \tag{7}$$

Z 軸近傍の電位は $\Phi(z)$ とその二階微分 $\Phi''(z)$ で大体のところは決まってしまう。

今の回転対称軸を有する問題では、独立な方向は Z 軸方向と r 軸方向がある。更に、回転対称性から Z 軸に直交する任意の方向が r 方向になり得る。従って、この 3 次元空間における独立な方向に対して、r 方向は 2 個の自由度、Z 方向は 1 個の自由度を持つ事になる。この自由度の数が、上では因子 2 として登場したと思っておくと良い。

2 階微分は曲率に関係している。直観的には曲率そのものだと思っておいて構わない。ラプラスの方程式では、直交する 3 個の面で切った時の等ポテンシャル線の曲率の和が 0 である事を要求している。等価な二つの r 方向と 一つの Z 方向の曲率の和が 0 ならば、$2\,\partial^2\phi/\partial r^2 + \partial^2\phi/\partial z^2 = 0$ という式が登場する事は直観的に納得出来るだろう。

この電場の下で電子に対する近軸光線の運動方程式 (非相対論的)

$$m\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}=q\frac{\partial\phi}{\partial r} \tag{8}$$
$$m\left\{2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}=0$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2}=q\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

上から順に dr/dt ,$d\theta/dt$,dz/dt をかけて加えればエネルギー積分が導ける。
ここで電位の 0 点を適当に選ぶと，次のようにエネルギー積分になる。

$$\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}=q\phi \tag{9}$$

真中の式は、

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0 \tag{10}$$

と変形できるから、角運動量の保存則が導ける。近軸光線では、$\left|\frac{dz}{dt}\right|\gg\left|\frac{dr}{dt}\right|$,$\left|\frac{dz}{dt}\right|\gg\left|r\frac{d\theta}{dt}\right|$

であるから，Z 軸上の値で代表させると

$$\frac{dz}{dt}=\sqrt{\frac{2q\Phi(z)}{m}} \tag{11}$$

または

$$\frac{d}{dt}=\sqrt{\frac{2q\Phi(z)}{m}}\times\frac{d}{dz} \tag{12}$$

初速度の効果を無視すると、$v(z)\sim\frac{dz}{dt}\propto\sqrt{\Phi}$ である。θ に関する運動方程式からは角運動量積分がでて来た。Z 軸のまわりの一定のラセン運動に対応し，Z 軸を含む面外のひねり運動は無視すると $d\theta/dt=0$
これで軌道を $r(z)$ の形に書き表す運動方程式が作れる。$m\frac{d^2r}{dt^2}=q\frac{\partial\phi}{\partial r}$ に代入する。

$$\sqrt{\Phi(z)}\cdot\frac{d}{dz}\left(\sqrt{\Phi(z)}\,\frac{dr}{dz}\right)=-\frac{1}{4}\,r\,\Phi''(z) \tag{13}$$

z でこの式を一回積分すると

$$\left[\sqrt{\Phi(z)}\,\frac{dr}{dz}\right]_f-\left[\sqrt{\Phi(z)}\,\frac{dr}{dz}\right]_i=-\frac{1}{4}\int_i^f r(z)\frac{\Phi''(z)}{\sqrt{\Phi(z)}}\,dz \tag{14}$$

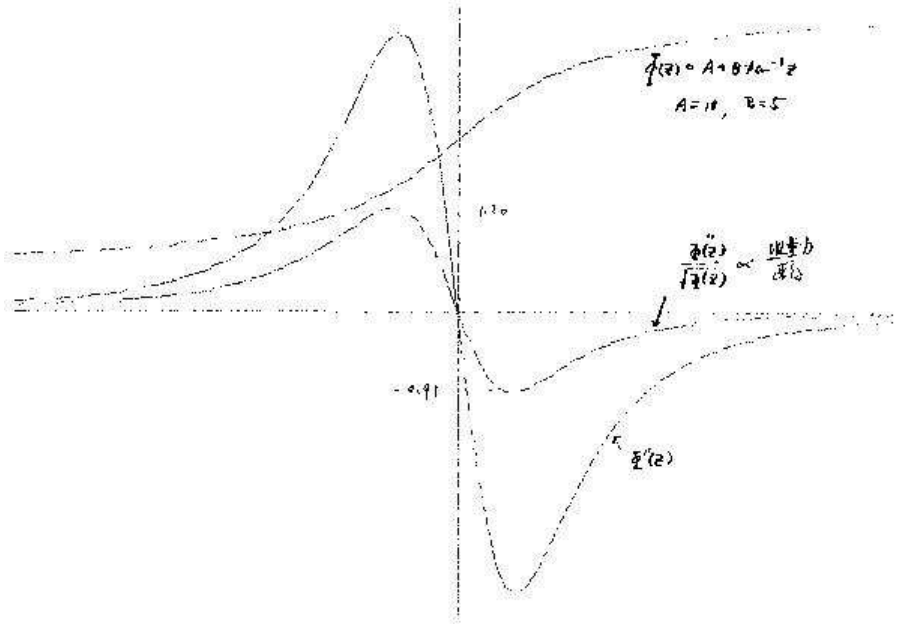
この式は点 i から f へ粒子が移動するときの (速度 v) × (軌道が Z 軸となす角度 dr/dz) の両点での差が右辺の積分に比例する事を示している。従って $\dfrac{\Phi''(z)}{\sqrt{\Phi(z)}}$ は各点での収束力の強さという意味を持つ。

光学レンズの収束機構を振り返っておくのが教育的だろう。凸レンズに平行光線が入射したとする。光軸に沿って入射した光線は、レンズ面に垂直に入射し、垂直に出ていくので全然収束作用を受けない。一方、レンズの中心から r だけ離れた距離に入射した光線は、レンズ面に垂直には入射せず、ある角度を持っている。このレンズ面に立てた法線と入射光線とのなす角度は r と共に単調に増加する。そして、この角度に収束力は (ほぼ) 比例する。

結局、光軸からの距離と共に単調増加するような収束力が作用すれば、全体としてみると、凸レンズの様な収束作用を期待できる。

上に登場した式の右辺、被積分関数は r に比例する項と、その点での収束力の積と言う形をしている事に気が付くだろう。

加速レンズの時，右辺の被積分関数の大体の様子は図のようになる。



この図では、ポテンシャル $\Phi(z)$ の代用品として、$Tan^{-1}(z)$ を採用し、その 2 階微分と収束力の強さを計算した。従ってこの図には定性的な意味しか無い。

$\Phi''(z)$ は $Z=0$ で反対称であるが，$\sqrt{\Phi(Z)}$ は $Z>0$ では $Z<0$ より大きいので $r(z)$ が一定でも積分は 正 となり，

$$\left(v\frac{dr}{dz}\right)_f - \left(v\frac{dr}{dz}\right)_i < 0 \tag{15}$$

これは収束を示している。
これにより収束性を増すには

i) $\Phi''(z)$ を大きくする $\rightarrow$ gap を狭くする
ii) $1/\sqrt{\Phi}$ の変化を大きくする $\rightarrow$ 電圧をかける

が有効である事がわかる。また ii) より，初速度の大きなものに対しては収束性が悪くなる。

被積分函数は $r(z)$ を含むので，軸から遠くを走るイオンの収束力の方が近くのイオンよりも収束力は強い。 $\longrightarrow$ レンズ作用を有する
簡単な議論をするならば，収束性を特徴付ける場の量は次の量と思っておけばよい。

$$-\frac{1}{4}\int_i^f \frac{\Phi^{''}(z)}{\sqrt{\Phi(z)}}\,dz \tag{16}$$

円筒磁場の収束作用
静的な磁場は、電場と同様に、potential から導かれる。

$$\phi_m(r,z) = \Phi_m(z) - \frac{r^2}{4}\Phi_m''(z) \tag{17}$$

$$\mathbf{B}(r,z) = -\nabla\,\phi_m = \frac{r}{2}\Phi_m''(z)\,\mathbf{e}_r - \Phi_m'(z)\,\mathbf{e}_z \tag{18}$$

静磁場中の荷電粒子の運動には、単純なエネルギー積分が存在する。運動方程式を $m\ddot{\mathbf{r}} = q\,(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B})$ として、スカラー的に 速度 $\mathbf{v}$ を両辺にかけると、$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{B}) = 0$ であるから、$v = \sqrt{2\,q\,\Phi/m}$ = 一定という式を得る。ここで、Φ はイオンの加速電圧である。即ち、静磁場中ではイオンは方向は変えるが速度 (の大きさ) は変えない。一方静磁場中では、角運動量積分は存在しない。但し、$\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0$ ならば例外である。
運動方程式を円筒座標で書き下すと、

$$m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} = q\,r\,\frac{d\theta}{dt}B_z \tag{19}$$

$$m\left\{2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\} = q\left(\frac{dz}{dt}\,B_r - \frac{dr}{dt}\,B_z\right)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -q\,r\,\frac{d\theta}{dt}\,B_r$$

$B_r = \frac{r}{2}\Phi_m''$、$B_z = -\Phi_m'$ を使うと、$B_r = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dz}$ と書けるから、B_r を消去出来る。$v = v_z = \frac{dz}{dt}$ という近似を併用すると、2 番目の運動方程式の右辺は

$$\frac{dz}{dt}B_r - \frac{dr}{dt}B_z = v\left(-\frac{r}{2}\frac{d\,B_z}{d\,z}\right) - \frac{d\,r}{d\,z}v\,B_z = -\frac{v}{2r}\frac{d}{dz}\left(r^2\,B_z\right) \tag{20}$$

と近似できる。一方左辺は、

$$2v^2\frac{dr}{dz}\frac{d\theta}{dz} + rv^2\frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{v^2}{r}\frac{d}{dz}\left(r^2\frac{d\theta}{dz}\right) \tag{21}$$

と変形すると、積分を実行する事が出来る。運動量を $mv = p$ と書いておくと、

$$r^2\left(\frac{d\theta}{dz} + \frac{qB_z}{2p}\right) = C = \text{一定} \tag{22}$$

ここで、$r = 0$ が許された軌道ならば、C = 0 である。この時には

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{qB_z}{2p} \tag{23}$$

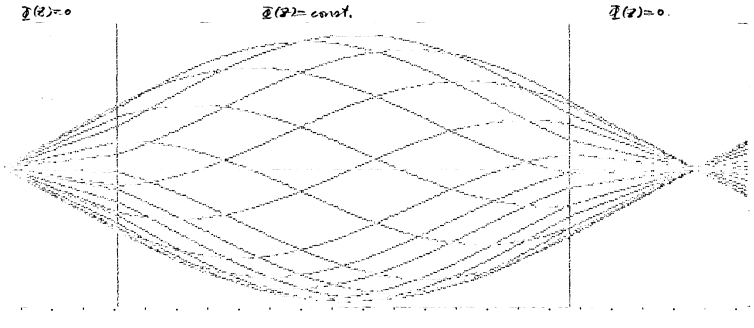
軌道の方程式は、第１式で $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ を無視すると、

$$mv^2\frac{d^2r}{dz^2} = q\,r\,v\left(-\frac{qB_z}{2p}\right)B_z \tag{24}$$

又は

$$\frac{d^2\,r}{dz^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{q\,B_z}{p}\right)^2 r \tag{25}$$

と書ける。この式は、変位に比例した力が働いている事を示し、その符号は負であるから、収束力が働いている事を示している。一般には、B_z は z の関数であるから sin と cos で解が書き下せる訳ではないが、三角関数に近い振舞いをする事は想像されよう。右辺の復元力は p^2 に反比例するから、エネルギー分散性がある。この型のものは、ベータ線用にレンズスペクトロメータとして使われている。大きな立体角を持つのが特徴である。図の様に、納豆のワラ包みを捻った様な軌跡となる。



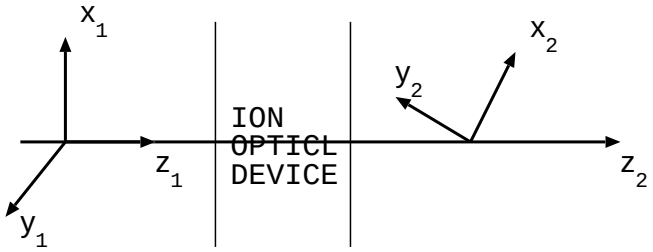
$\frac{d^2r}{dz^2}$ は、$\frac{d\theta}{dz}$ が B_z に比例するから、B_z^2 に比例する。起磁力が一定ならば、磁場を出来るだけ局所化して、B_z の大きな部分を作るのが得策である。

$r = 0$ を通らない時には、$r^2\left(\frac{d\theta}{dz} + \frac{qB_z}{2p}\right)$= 一定であるから、一定の運動量 p を持った粒子を B_z = 一定という磁場に投入すると、初期条件を旨く選ぶと、$\frac{d\theta}{dt}$ = 一定、$\frac{qB_z}{2p}$ = 一定、r^2 = 一定という発散しないビームを作る事が出来る。(Brillouin flow) イオン (電子) 源からのビーム輸送に利用できる。円形加速器のビームクーリング技法の一つに electron cooling というのがある。ドーナツ状の電子ビームを例えば陽子ビームの外側を走らせ、陽子と電子で運動量のやりとりをさせる。この時の電子軌道の制御にも、この技法は使用される。

Transfer matrix (輸送行列) を用いた表現

イオン光学系を設計する場合を想定する。初期条件の異なる個別のイオンの軌跡を追跡するという方法がもっとも単純で分かりやすい。特に解析的に解ける問題ならば、この手法は完全であると言えよう。しかし、解析的に解けるのは、非常に例外的な場合と言えるだろう。そこで少し体系的な手法を編み出す事が要請され、行列の応用が考えられた。幾何光学の世界での発想と同じように、物界と像界という二つの空間を考え、この二つの空間、物界から像界への写像という捉え方をする。単純な発想としては、近軸光線を想定し、その座標軸となる参照軸 (光線) を先ず定義する。参照軸を中心軌道と呼ぶ場合も多い。一般のイオン軌道はこの参照軸を規定するパラメータと少しだけ異なるパラメータを持っている運動の軌跡と考える。

この参照軸そのものを z 軸にとる。この軸は電場や磁場のある領域では直線ではない。x、y 軸は右手系となるように選ぶ。主な場の強さにより軌道が最も大きく曲げられる方向を x 軸に選ぶ場合が多い。別の選び方は、z 軸と x 軸が実験室系での水平面内に置かれる場合もある。



図の様に、左からイオン光学装置に入射し、右へ出ていくとする。一般に軌道には曲げと捻りが加わるだろうから、 2 という足は捻られた座標系で記述するのが便利かも知れない。この内の x-z 面内での入射イオンの初期条件を考えよう。出発点の x 座標は x_1 だけ原点からずれていて、z 軸とは $x_1' = dx/dz$ だけ角度が異なっているだろう。又、相対運動量は中心軌道のイオンの運動量とは δ_1 だけ異なっているとする。$1 + \delta = P_1/P_0$。他のパラメータとしては、質量比やエネルギー比等も場合に依り導入される。

これらのパラメータを列ベクトル $\mathbf{x}$ と書く事にしよう。入口と出口のベクトルは、ある行列を用いて関係を付ける事が出来る。この行列を M と書くと、

$$\mathbf{x}_2 = M\,\mathbf{x}_1 \tag{26}$$

と書ける。この M は輸送行列 (Transfer matrix) と呼ばれる。軌道を決定するパラメータの中心値からのずれを摂動と考えて、1 次の範囲ではこの様に行列形式で書く事は、特に大きな発明とは考えられないが、更に高次の項までも行列形式に書く場合がある。例えば trio というプログラムでは、電磁場を与えて、 3 次項迄を計算する。

イオン光学要素の機能を行列の形に書くと、複数のイオン光学要素を持つ通常のイオン光学系は、これらの行列を掛け合わせる形で、性能評価出来る。

簡単な場合には、x-z 面内のベクトルと y-z 面内のベクトルとは干渉しないので独立に計算する場合もある。

x 方向 (bend 面内) の行列要素の意味。

独立なベクトルを、$(x,\ x',\ \delta)$ だとする。輸送行列 M の第 1 、 1 要素は、物点 (始点) の x 座標が像点の x 座標に変換される係数だから、像倍率という意味がある。$M_{1,\,1} =< x|x >$ と書かれる場合もある。

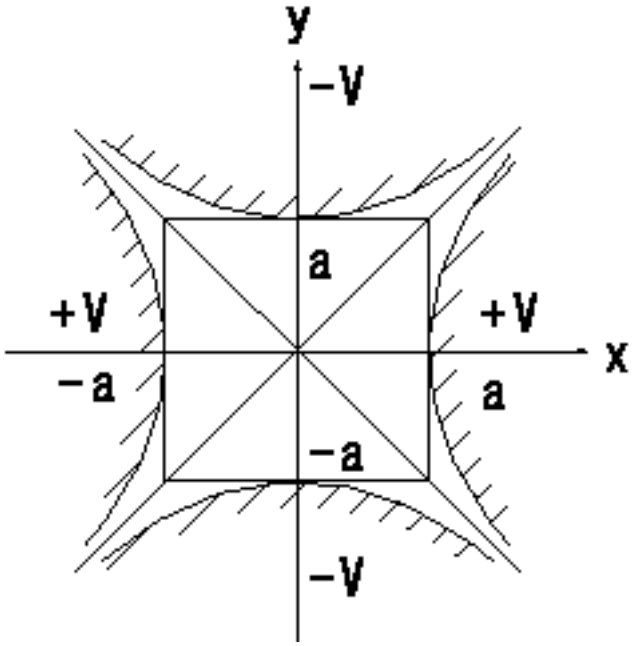
$M_{1,\,2}$ は、全体の輸送行列では、角度収束に関係する。物点から、x_0' という角度で放出されたイオンは、像点では、$x_1 = M_{1,\,2}\,x_0'$ という位置に来る。もしも、$M_{1,\,2} = 0$ ならば、物点での放出角度に像の位置は、関係しない。即ち、方向収束する。

$M_{1,\,3}$ は、運動量が中心軌道とは異なるイオンが、像点で、どれだけ中心軌道からずれるか？という事に関係している。別の言葉で言えば、$M_{1,\,3}$ が大きい程、異なる運動量のイオンの焦点は、中心軌道からはずれる。従って、この係数は運動量分散と呼ばれる。

Q レンズ等

円筒対称ではないが beam transport 系として重要な道具の一つに quadrupole lens がある。

これは遠くにビームを導く際の収束要素として欠くことのできないもので，静電・電磁的なものが実用に供されている。電気的４重極レンズの概念図を以下に示す。



これは $x^2 - y^2 = \pm const.$ という４本の線で囲まれた領域を通るイオンが収束力や発散力を受ける装置である。図の様に電圧をかけると，potential ϕ_e は

$$\phi_e(x, y) = \frac{V}{a^2}(x^2 - y^2) \qquad\qquad |x| < a\,,\ |y| < a$$

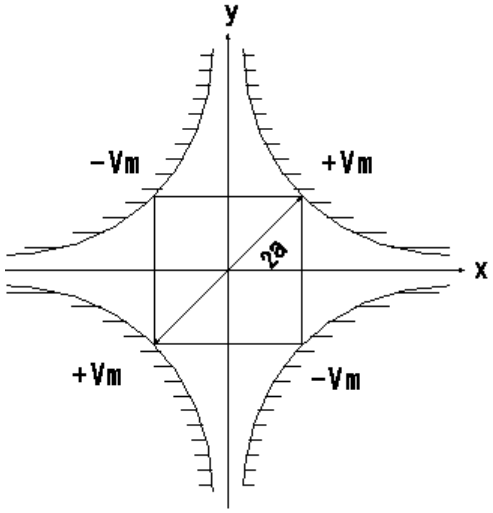
と与えられる。電場は

$$E(x, y) = -\nabla\,\phi_e = -\frac{2V}{a^2}(x\,\mathbf{e}_x - y\,\mathbf{e}_y)$$

と中心からの変位に比例した形に書ける。運動方程式は

$$m\frac{d^2}{d\,t^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2\,q\,V}{a^2}\begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

磁気的 quadrupole lens も同様に作られる。(図参照)



磁場を用いた場合も，静的な場は potential ϕ_m から導かれるから

$$\phi_m(x,y) = \frac{2V_m}{a^2} x\, y$$

磁場は

$$\mathbf{B} = -\frac{2V_m}{a^2}(y\,\mathbf{e}_x + x\,\mathbf{e}_y)$$

運動方程式は，粒子の主運動方向が Z 方向だと仮定すると，

$$m\frac{d^2}{d\,t^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2\,q\,V_m\,v_z}{a^2}\begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

quadrupole 場の下で運動方程式は，電気・磁気どちらも同じ運動方程式で記述される。ただし両者は配置が ４５度異なっていること及び力の符号のつき方が異なる。

運動軌跡の記述

$\frac{d\,z}{d\,t} = v =$ 一定 と仮定し，$\frac{d}{dt} = v\,\frac{d}{dz}$ と書き直すと

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k^2\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

ここで、

$$k^2 = -2\frac{V_e\,q}{a^2\,v^2\,m} = -\frac{qV_e}{a^2\,T} \qquad \text{電気的四重極の場合}$$

ここで、T は運動エネルギーである。

$$k^2 = 2\frac{V_m\,q}{a^2\,v\,m} = 2\frac{q\,V_m}{a^2\,p} \qquad \text{磁気的四重極の場合}$$

といった形になる。ただし k^2 は正にも負にもなり，電気的な場合は分母にエネルギー，磁気的な場合は分母に運動量が入っているので，それぞれエネルギー分散，運動量分散性がある。$x,\ y$ 軸を適当に入れ換え $k^2 > 0$ とすると、この運動方程式の解は、

$$\text{x 方向の解} \qquad x = A\cosh kz + B\sinh kz$$

$$\text{y 方向の解} \qquad y = C\cos kz + D\sin kz$$

Q-lens の入り口での位置及び z 軸となす傾きを $(x_0\ ,\ x_0{}')$,$(y_0\ ,\ y_0{}')$ とすると，係数 A, B, C, D は次のように決まる。(入り口で $z = 0$ と置く)

$$A = x_0,\ \ B = x_0'/k,\ \ C = y_0,\ \ D = y_0{}'/k$$

長さ ℓ の Q-lens を通過した後の位置と z 軸となす角度を $(x_1, x_1{}')$,$(y_1, y_1{}')$ とすると、解は次式で与えられる。

$$x_1 = x_0\ \cosh k\ell + \frac{x_0'}{k}\sinh k\ell \qquad y_1 = y_0\cos k\ell + \frac{y_0'}{k}\sin k\ell$$
$$x_1' = k\,x_0\sinh k\,\ell + x_0'\cosh k\ell \qquad y_1' = k\,y_0\sin k\,\ell + y_0'\cos k\ell$$

これは通常行列の形に書かれ，transfer matrix と呼ばれる。

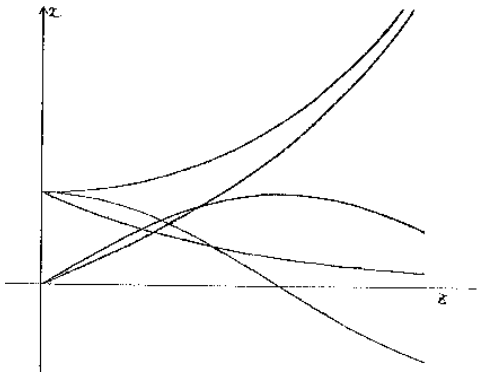
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh k\ell & \dfrac{1}{k}\sinh k\ell \\ k\sinh k\ell & \cosh k\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k\ell & \dfrac{1}{k}\sin k\ell \\ -k\sin k\ell & \cos k\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

直接計算するとわかるように transfer matrix の行列式の値は 1 である。これは位相空間の体積 (例えば $x_0 \times x_0'$) が保存するというリュービルの定理からの帰結であり，計算のチェックにも使える。

今の場合，力は必ず進行方向に直角にかかっているからイオンのエネルギーに増減はない。

下図は初期条件 $\left(x_0\ =\ 0\ ,\ x_0'\ =\ 1\right)$, $\left(x_0\ =\ 1\ ,\ x_0'\ =\ 0\right)$ に対する三角・双曲解及び $\left(x_0\ =\ 1\ ,\ x_0'\ =\ -\ 1\right)$ に対する双曲解の様子を示したものである。

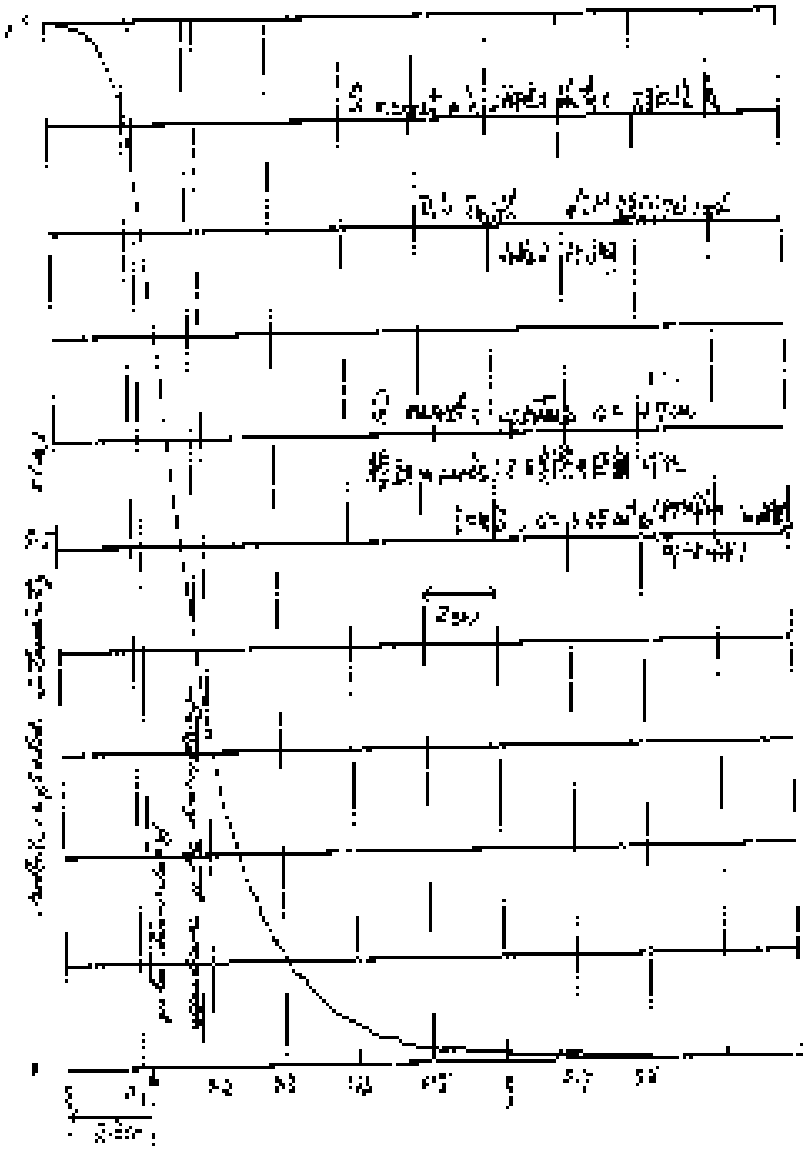


三角函数解は必ず周期的であるから収束性がある。双曲解は発散的傾向にあるが，$(x_0 = 1\ ,\ x_0' = -1)$ という解はある意味で収束的である事に注意したい。$x_0' < 0$ という初期条件と組み合わせて使えば便利に使えるものである。

実用上の注意

電磁場の z 成分は無いと仮定したが，これは Q lens の出入口付近では正しくない。実用上は (Q lens の有効長さ) を (Q lens の物理的長さ) +(gap $(2a)$ の 0.5 ~ 1 倍) としておけばよさそうである。ここで因子 $(0.5$ ~ $1)$ というのは，$\partial B/\partial r$ をどの程度にとるかにとるかによる。

図は、下に示した文献に報告されている、Q 電磁石の端縁場の様子を示したものである。



磁極の内部と同じ強さの磁場が磁極外にいくらか浸み出していて、それから外では磁場は急に 0 になるという近似を sharp cut off 近似と呼ぶ。

pole boundary から $SCOFF$ field boundary 迄の距離は今の場合 ,aperture 半径の 52 %外へ出ている。内径 ID が $2"$ の Q-magnet に対し，effective field boundary が $0.57"$ magnet の pole boundary はより外に出ていて，この近似は pole tip の径や excitation によらないという報告もある。

I.E.Dayton，F.C.Shoemaker & R.F.Mozley　NIM25(1954)485

裏著「電子工学」(共立全書) では有効長 $L = \ell + 1.14a$ としている。
(上の論文の引用？) $\dfrac{1.14}{2} = 0.57$

(磁石材料の磁気飽和の有無による)

電・磁極を直角双曲線に加工する事は工作上有利ではない。大体 a 程度の曲率半径を有する円筒で近似している。もう少し精度を上げると次のようになる。
$x^2 - y^2 = 1$ という双曲線の右半分を，中心 $(A\ ,\ 0)$ 半径 R の円で x 軸を軸として ± 0.6 ラジアンの範囲で一番よく近似するのは，

$$A = 2.1781 \quad , \quad R = 1.1752$$

$\pm$ 0.78 ラジアンに広げると $A = 2.3302 \quad , \quad R = 1.3219$ である。

Enge の論文 (Rev.Sci.Instrum 30 (1959) 248) には励磁電流と磁気的 4 重極電磁石の強さとの関係として次式を与えている。

$$k = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{3.2\,\pi\,IN}{B\,\rho}} \quad (cm^{-1})$$

where $B\rho$ in Gauss・cm
d : aperture diameter (not radius) in cm
IN : Ampere turn per pole

Q・doublet と Q・triplet

Q lens は一つだけ使うと，x 方向に収束性がある時には y 方向には発散性を示す。即ち x 方向の凸レンズと y 方向の凹レンズの作用を併せ持つ。このレンズを 2 枚組み合わせると，x, y 両方向に収束作用を有する lens 系を作り得る。

Q doublet

行列を用いて 2 枚レンズの収束条件を調べてみる。
長さが L の自由空間に対する Tranfer matrix を考える。初期ベクトルと最終ベクトルを以下の様にとると、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

次の、関係が成立する。

$$x_1 = x_0 + x_0' \times L, \qquad x_1' = x_0'$$

従って、長さが L の自由空間の transfer matrix は次式で与えられる。

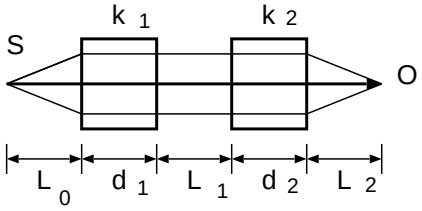
$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D\,(L)$$

先に導いた Q lens の transfer matrix をもう一度書いておくと、

収束性の Q・lens
$$\begin{pmatrix} \cos kd & \frac{1}{k}\sin kd \\ -k\sin kd & \cos kd \end{pmatrix} = Q_C(k,d)$$

発散性の Q・lens
$$\begin{pmatrix} \cosh kd & \frac{1}{k}\sinh kd \\ k\sinh kd & \cosh kd \end{pmatrix} = Q_D(k,d)$$

図のような長さ L_0 の自由空間、強さが k_1、長さが d_1 の Q 磁石、長さ L_1 の自由空間、強さが k_2、長さが d_2 の Q 磁石、長さ L_2 の自由空間 で構成される装置を考える。



全体の Tranfer matrix の x , y 成分は、

$$M_x = D(L_2) \times Q_C(k_2, d_2) \times D(L_1) \times Q_D(k_1, d_1) \times D(L_0)$$

$$M_y = D(L_2) \times Q_D(k_2, d_2) \times D(L_1) \times Q_C(k_1, d_1) \times D(L_0)$$

の様に個々の Tranfer matrix の積の形に書ける。
ここで、

$$M_x \ = \ \begin{pmatrix} M_{x\,x} & M_{x\,x'} \\ M_{x'\,x} & M_{x'\,x'} \end{pmatrix}$$

等と行列要素を書くと，x, y 両方向とも，一点 S から放出された粒子が O に収束する (二重収束と言う) 条件は

$$M_{xx'} = M_{yy'} = 0$$

となればよい。k_1 , k_2 を調節すれば，この条件は満足される。

次に二重収束が成立する直観的な説明を与えておこう。先ず、覚えて置くべき事は、収束力や発散力の強さは、中心軸からの距離に比例しているという事実である。

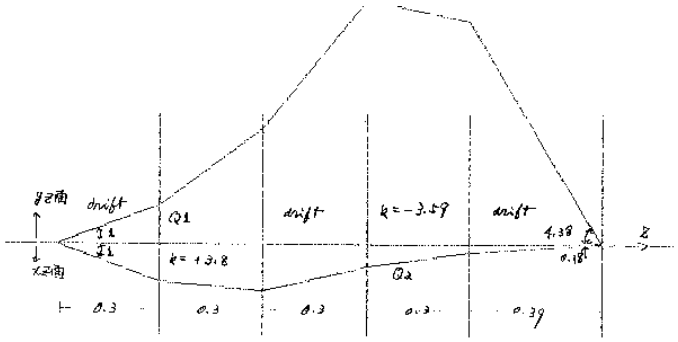
最初に収束性の Q 磁石 (Q_1) を通ったとする。Q_1 の入口での振幅が $x_{1\,in}$ であったとすると、出口では振幅 $x_{1\,out}$ は、$x_{1\,in}$ よりも小さくなっているとする。次の Q 磁石 Q_2 の入口での振幅 $x_{2\,in}$ は、$x_{1\,in}$ や $x_{1\,out}$ よりも小さく、符号は全て同じである様に条件を整える。この時には、Q_2 での発散力は、Q_1 での収束力よりも弱くなる。即ち、この条件を満足すれば、収束性が発散性を上回る。

次に、最初に発散力を受ける面での力の大きさを比較しよう。Q_1 では発散力を受けるから、出入り口での振幅 $y_{1\,in}$, $y_{1\,out}$ は同符号であり、$y_{1\,in}$ の方が小さい。Q_2 の入口での振幅 $y_{2\,in}$ も $y_{1\,in}$ と同符号であり、大きさは増えているとする。Q_2 では 振幅に比例した収束力を受けるから、Q_2 での収束力は Q_1 での発散力よりも強くなる。

このようにすると、最初が発散力でも収束力でも、全体としては収束力が強いという条件を実現する事が出来る。

図を描いてみると良く分かるが、$x_1 > x_2,\ y_1 < y_2$ という条件を実現しているのは、二つの Q 磁石の真中にある自由空間である。逆説的な言い方をすると、この Q_1 と Q_2 間に挟んだ自由空間が収束性を与えている。

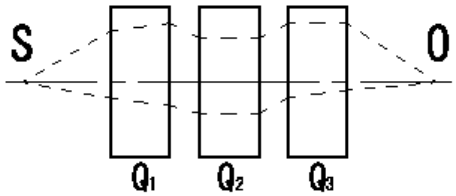
具体的な数値計算の結果を以下に図示する。



上図は Q・doublet の二重収束性を示した図である。ここでは単純化のために，drift space と Q・lens の長さを全て 0.3 とした。$k_1 = +3.8$ とし，k_2 を適当に調節すると二重収束性を得る。$x' = y' = 1$ として start すると，像点での収束角は $x' = 0.18\ ,\ y' = 4.38$ と非常に非対称性が大きい。この様に非対称性が大きいと装置の大きさも大きくなりがちである点に注意。

この場合，いかに物理的配置を対称にしても，収束後発散という面と発散後収束という非対称性が残るから，光学的非対称性は残る。

これが欠点となる場合には，Q・lens を 3 つ並べ triple Q と称される。
図のように，S , O の中心を対称面とする様に配置し，Q_2 の中央で $x' = y' = 0$ となる様に調節すれば， x , y 面内での倍率が 1 で且つ S から出た時の像がそっくりそのまま O に作られる事は自明であろう。(但しこの時もエネルギー又は運動量分散性は残る)



三連の Q lens では、中心の Q 磁石の中点を対称点として、左右を対称に配置する事が出来るならば、像倍率が x、y 両面共に 1 という条件を実現出来る事は、簡単に了解出来るだろう。

Q lens の端縁磁場の影響に関する議論は、以下の論文を参照してもらいたい。
H. Matsuda, and H. Wollnik, Nucl. Instru. Meth.**103**(1972) 117.

Mathieu の方程式
次の 2 階微分方程式の解で、 Mathieu 関数は定義される。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda - 2\,q\,\cos 2\,x)y = 0 \tag{1}$$

この方程式は、 2 次元 Helmholtz の方程式 $(\nabla^2 + \kappa^2)\, u = 0$ を楕円座標

$$x = c\, \cosh\xi\, \cos\eta, \quad y = c\, \sinh\, \xi\, \sin\eta$$

で変数分離 $u = F(\xi)\, G(\eta)$ すると登場する。

$$\frac{d^2\, F}{d\xi^2} + (-\lambda + \frac{c^2\, \kappa^2}{2} \cosh 2\, \xi)F = 0$$

$$\frac{d^2\, G}{d\eta^2} + (\lambda - \frac{c^2\, \kappa^2}{2} \cos 2\eta)G = 0$$

この時、F は変形 Mathieu, G は Mathieu 方程式となる。

ここでは、Mathieu 方程式 を取り上げる。この方程式の演算子部分 $\dfrac{d^2}{dx^2} + (\lambda - 2\, q\, \cos 2\, x)$ はパリティーを保存するから、この方程式には、偶パリティーと奇パリティーの独立解が存在する。そこで、$x = 0$ 近傍で、サイン (コサイン) 的な解を想定する。

$$y_c(x) :\ \cos\ \text{like}\ ; \quad y_c(0) = 1, \quad y_c'(0) = 0$$

$$y_s(x) :\ \sin\ \text{like}\ ; \quad y_s(0) = 0, \quad y_s'(0) = 1$$

これらの解は、$x = 0$ 付近ではサインやコサインの様に振舞うが、必ずしも周期関数である必要もなければ、有界である必要もない。

Floquet の定理

物性物理を勉強した人達は、 Bloch の定理という方が分かり易いだろうが、次の定理がある。

方程式 (1) は、次の性質を持つ解が必ず一つは存在する。

$$y(x) = e^{i\mu\, x}\, u(x), \quad u(x + \pi) = u(x) \tag{2}$$

即ち、$u(x)$ は周期がπ の周期関数である。但し、μ は一般には複素数であり、次の関係を満足する。

$$\cos(\mu\, \pi) = y_c(\pi) \tag{3}$$

ここで、μ は固有指数と呼ばれる。$\mu = \mu' + i\, \mu''$ と実部と虚部に分けて書くと、

$$\cos(\mu\, \pi) = \cos\mu'\pi\ \cosh\mu''\pi - i\ \sin\mu'\pi\ \sinh\ \mu''\pi = y_c(\pi)$$

であり、y_c は上の定義により実数だから、固有指数の実部 μ' は整数であるか又は、虚部 $\mu'' = 0$ でなければならない。

もしも、$|y_c(\pi)| > 1$ ならば、$\mu'' \neq 0$ となり、Bloch の解は有界ではあり得ない。いっぽう、$|y_c(\pi)| < 1$ ならば、$\mu'' = 0$ であって (即ち μ は実数) Bloch の解は絶対値が 1 の関数 $(e^{i\mu\, x}\ )$ と周期がπ の関数 $u(x)$ の積であり、この場合は当然、有界である。

$|y_c(\pi)| = 1$ というのが、Bloch の解が有界かそうでないかを判断する基準となる。

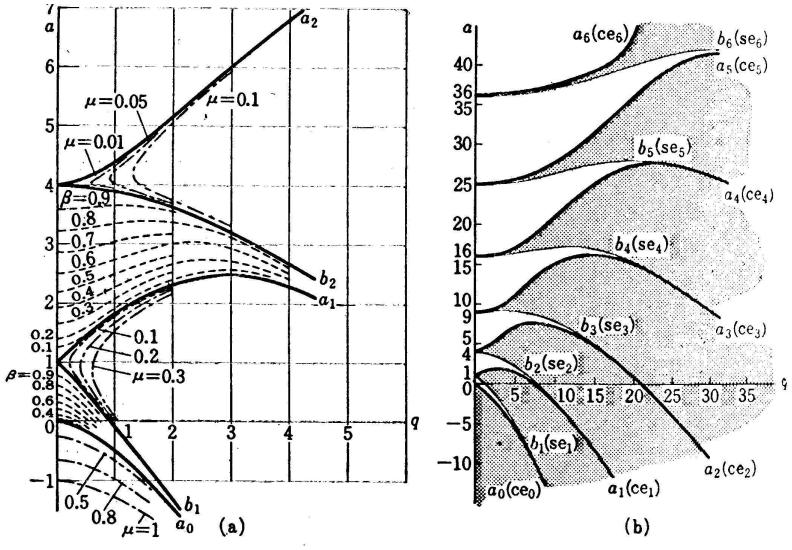
証明は省略する。何か数学の教科書を参考にしてもらいたい。

(1) で、λ と q を与えた時、コサイン的な解を $x = \pi$ 迄延長すると、解の有界性が判断できる。解をフーリエ級数に展開するのが、有効かもしれない。

q を与えて、" 固有値" λ の範囲を描ける。特に $q = 0$ ならば、$\lambda > 0$ で、三角関数解がある事は自明である。$|q|$ が小さければ、$\lambda < 0$ の範囲にも安定解が存在し得る。即ち、$q = 0$

ならば本来は指数関数解となるべきものが、$2\,q\,\cos\,2x$ の存在の為に発散しなくなる場合がある。物理的には、倒立振り子がこの例になっている (本来倒れるはずだのに倒れない)。

安定解の存在領域を示す図を岩波の数学公式集から、引用しておこう。



以下で興味のあるのは、原点に一番近くにある安定領域である。左の図で a_0 と b_1 に囲まれた領域である。$0 \leq \lambda \leq 1$ という縦軸の部分と $0 \leq q \leq 1$ より少し小さな横軸の部分とが含まれている。

q は $\cos 2x$ の係数であるから、安定領域は $q < 0$ の方にも対称に広がっている。

一般解

1) μ が整数でない時 $(|y_c(\pi)| \neq 1)$。$e^{i\,\mu\,x}\,u(x)$ と $e^{-i\mu\,x}u(-x)$ が独立解である。

2) μ が整数の時 $(y_c(\pi) = \pm 1)$。周期はπ 又は 2 π の周期解が一つ存在する。

2 ー 1)$y_c(x)$ が周期解ならば、もう一つの独立解は

$$y(x) = \pm\frac{x}{\pi}\,y_s(\pi)y_c(x) + f(x)$$

2 ー 2) $y_s(x)$ が周期解ならば、もう一つの独立解は

$$y(x) = \pm\frac{x}{\pi}\,y_c'(\pi)\,y_s(x) + g(x)$$

ここで、$f(x),\ g(x)$ は周期がπ 又は 2 π の周期関数である。

この時、非周期解は、$x \times$ (周期解) + (周期解) の形をしているので、有界ではない。即ち、危険ですからブランコを漕ぎ続けてはいけません！！

簡単な例

単振動に対する周期的な摂動を取り上げる。

$$\frac{d^2\,y}{dx^2} + \omega_0^2\,y = 0$$

は単振動を表す。ここで、

$$\omega_0^2 \to \omega(t)^2 = \omega_0^2(1 - \epsilon\cos\Omega\,t)$$

と摂動をあたえてみる。$\Omega\, t = 2\, t'$ という変数変換により、

$$\frac{d^2y}{d\, t'^2} + \left(\frac{2\omega_0}{\Omega}\right)^2 (1 - \epsilon\, \cos\, 2\, t')y = 0$$

と変形できるから、

$$\lambda = \left(\frac{2\omega_0}{\Omega}\right)^2, \;\; 2q = \left(\frac{2\omega_0}{\Omega}\right)^2 \epsilon$$

と置く事で、Mathieu の方程式が登場する。

追記 Floque の定理は、少し一般化された Hill の方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda - 2\sum_{n=1}^{\infty} q_n\, \cos 2\, n\, x)y = 0$$

に対しても成立する。即ち、摂動には高調波が含まれていても良い。この事は、シンクロトロン等の円形加速器の理論にとって非常に有難い事である。

Quadrupole mass filter (mass analyzer)

Q-lens には、エネルギー又は運動量分散がある事は既に述べた。電気的な 4 重極レンズの電位は、これまでは直流電圧で使用していたが、交流成分を重ね合わせて使用すると、特定の質量/電荷比のイオンだけは収束させ、他のイオンは発散させる、質量フィルターを作る事が出来る。

この装置の potential ϕ は以下のように与えられる。

$$\phi\,(x, y) = \frac{V + W\cos\omega\, t}{a^2}\left(x^2 - y^2\right)$$

この場合の運動方程式は、円筒座標を用いると、次式で与えられる。

$$m\ddot{x} = -\frac{2(V + W\cos\omega t)}{a^2}qx$$

$$m\ddot{y} = \frac{2(V + W\cos\omega t)}{a^2}qy$$

又は

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -k^2\left\{1 + \alpha\cos\left(\frac{\omega z}{v}\right)\right\}x, \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = k^2\left\{1 + \alpha\cos\left(\frac{\omega z}{v}\right)\right\}y$$

ここに

$$k^2 = \frac{2Vq}{ma^2v^2}$$

$$\alpha = \frac{W}{V}$$

これを，Mathieu 微分方程式の標準型にもっていくために，$\frac{wz}{v} \;=\; 2\xi$ として新しい変数に移すと

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} \pm (A + 2Q\cos 2\xi)\, x = 0$$

複号は x,y による

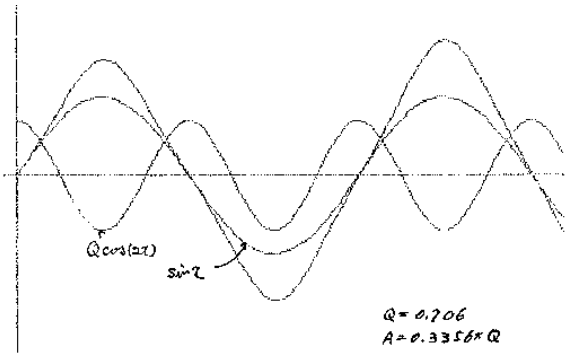
$$A = \frac{8Vq}{ma^2w^2}, \quad Q = \frac{1}{2}A\alpha = \frac{4Wq}{ma^2w^2}$$

Mathieu 函数の値は固有値 A と摂動項 Q の大きさにより，周期解がある場合と，発散解になる場合とがある。前の節では、λ と q という記号で登場した。

Quadrupole mass filter の場合には A も正，負の値をとり得るので (x,y 両軸方向共に安定解を得なければいけないから) A,Q の符号に依らず安定解を与える領域を用いる事となる。これは原点近くに存在する。(Q 軸で折り返し，$A < 0$ の安定領域を $A > 0$ の安定領域の重なるところが実用領域)

注意すべき点は A,Q は質量を含むが，v^2 は消えてしまっているから，エネルギー分散は無くなり，質量分散だけが残っている。これにより，質量分析をする装置が作れる訳である。

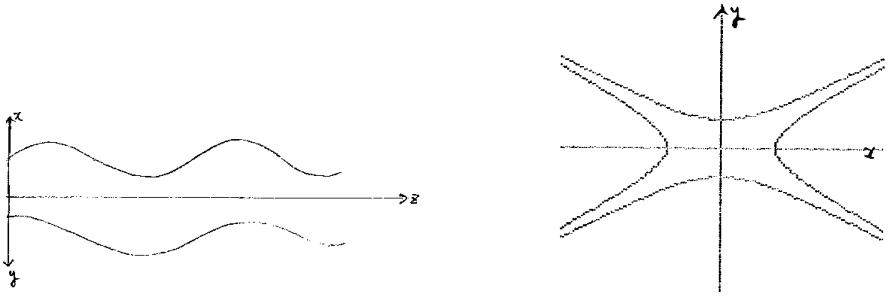
安定解領域ギリギリ内側で使う事にすると，特定の質量に対しては安定解であるが，他の質量に対しては不安定解とすることができる。この時，特定の質量のみが Q lens を通過できるので filter として使える事になる。このギリギリの点の値は Q=0.706, A=0.3356 × Q 付近である。質量に対する tuning は α を固定して電圧を掃引することにより実現される。参考のために Q=0.706, A=0.2369 に対する，sine-like な Mathieu 函数の振舞いを示す。比較のために sin x と Q $\cos 2x$ の図を示す。



周波数 f の振動を周波数 2f の外力で励起する方式は数学的には難しいが，ブランコで遊ぶ子供には非常に易しい事である。

RFQ (Radio-frequency Quadrupole Liner Accelertor)

Q-lens はイオンの進行方向 (z 軸方向) には構造を持たない。これに構造を持たせると，z 方向成分の持つ電場が実現できる。この z 成分で粒子を加速すると，収束性を備えた加速器が実現できる。この様な可能性は 1969 年 I.M.Kapchinskii と V.A.Teplyakov により提案され，米国や日本で実現された。xz，yz 面での断面の様子を図示する。大体において，xz 面 yz 面の断面は位相が 180 度ズレているだけで同じ構造を持っており，このために z 成分の電場ができる。任意の xy での断面は大体下図の様になっている。



この断面故に今迄の Q-lens の様に収束性を持たせることが可能である。ただし，DC 電圧をかけたのでは xz 面内に収束性を持たせると，yz 面内では発散しっぱなしであるから，AC 電圧をかけねばならない。RF 電圧をかけると，z 方向にも加速される位相と減速される位相があるが，加速位相をうまく使う事は可能である。

前述の定性的可能性をもう少し定量的にあたってみよう。導体中の光速は充分に速く静電気学が成立すると仮定すると，potential $u(r,\psi,z,t)$ は

$$u(r,\psi,z,t) = -\frac{1}{2}V\Big[F_0(r,\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r,\psi)\sin(k\,n\,z)\Big]\cos(\omega t + \phi)$$

と書けよう。ここで k は構造が Z 方向に持つ周期性できまる定数である。粒子速度を $\beta = v/c$ で表わすと，$k = 2\pi/\beta\lambda$ ： (λ は Z 方向の一周期) と与えられる。
$n = 2(2s+1)$ であると、

$$\cos n\psi = \cos n(\psi+\pi), \quad \cos n\psi = -\cos n(\psi+\pi/2)\pi$$

であるから、
z 方向に構造を持たない項、 $F_0\,(r,\psi)$ は 以下の様に Fourier 展開できる。

$$F_0 = \sum_{s=0}^{\infty} A_{os} r^{2(2s+1)} \cos 2(2s+1)\psi$$

ここで，$z = \dfrac{\ell\pi}{k}$ $(\ell = 0,1,2,\cdots)$ では電極は exact に x, y に関して対称になるが，この時には点 (r,ψ) と点 $\big(r,\psi+\pi/2\big)$ との値が等しくない様にするために， $\cos 4\psi$ 等は落としてある。z 方向には構造が周期的だと仮定すると，$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \to 0$ として， $F_n(r,\psi)$ は Laplace の方程式を満足する様にきめられる。$\Big(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = -k^2n^2\Big)$ となるから

$$F_n(r,\psi) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{ns} I_{2s}(knr)\ \cos 2s\psi$$

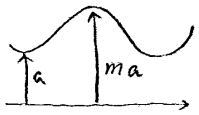
ここで， $I_m(x)$ は m 次の変形 Bessel 函数である。
最低次のみをとるならば，

$$u(r,\psi,z,t) = \frac{V}{2}\left\{X\Big(\frac{r}{a}\Big)^2\cos 2\psi + AI_0(kr)\sin kz\right\}\cos(\omega t+\phi)$$

ここで

$$A = \frac{m^2-1}{m^2I_0(ka) + I_0(mka)}, \qquad X = 1 - AI_0(ka)$$

であり，a, ma は xz 面内での z 軸から導体電極までの最短距離と最長距離である。



t を固定した時に等電位面を与える様に電極の形を決めなければならない。

$$r^2 \cos 2\psi = \pm \frac{a^2}{X} \{1 \mp AI_0(kr) \sin kz\}$$

を満足すればよい。

$\Delta z = \beta\lambda$ (Z 軸方向の一周期) に亘ってイオンが得るエネルギー ΔW は

$$\Delta W = \frac{1}{2} ekV \sum_{n=0}^{\infty} n \int_0^{\beta\lambda} F_n(r, \psi) \cos knz \cdot \cos(\omega t + \phi) dz$$

により計算され，高調波の寄与は 0 とおくと

$$\Delta W = 2eV\theta \cos\phi$$

と書ける。ここに $\theta \equiv \frac{\pi}{4} A$ は加速の効率を与える。(m=1 なら A=0 で加速しない)
横方向の振動の様子は一般には $\tau \equiv (\omega t + \phi)/2\pi$ を独立変数とすると，

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \left(\frac{2\pi^2 eV}{m\omega^2} \right) \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial x} \cos 2\pi\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial F_n}{\partial x} \sin n(2\pi\tau - \phi) \cdot \cos 2\pi\tau \right\}$$

最低次近似では

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{e\,V}{E_0} \left\{ X \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \cos 2\pi\tau - \frac{2\pi}{\beta^2} \theta \cdot \sin\phi \right\} x$$

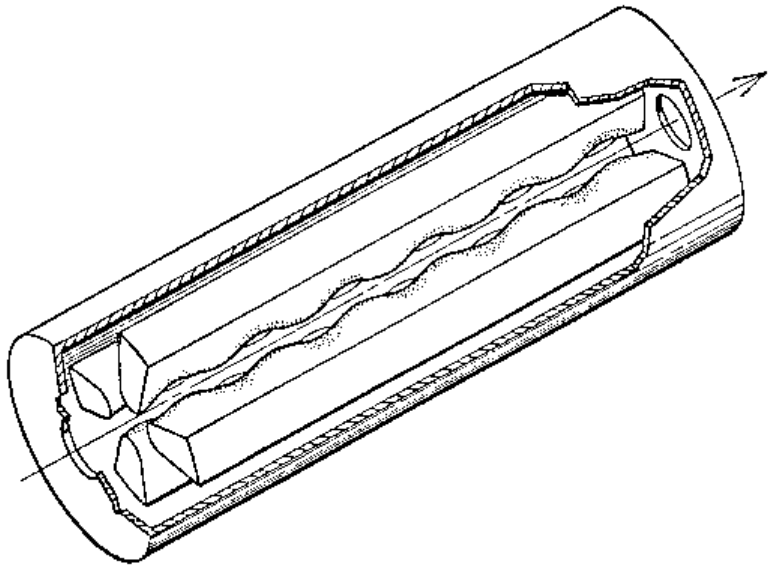
と書ける。右辺第二項のみならば，sine と cosine 又は sinh, cosh という解を与えて，普通の Q-lens であるが，右辺第一項があるから，quadrupole mass filter と同じく Mathieu 函数が解になる。うまく定数を選ぶと (x,z) (y,z) 面内で振動解が得られる。(beam が発散すれば当然加速器としては使えない)

低エネルギーでは安定解の条件は通常満足されている。加速器として RFQ を使う場合には z 方向の単位長さ $\beta\lambda$ はエネルギー増加に合わせて少しずつ長くしていく。

RFQ は rf 加速器の injector として注目されている。陽子加速で約 1 ~ 2 MeV 迄の加速を割合に短い区間で実現できる。DC beam を AC beam にする効率を 90 %以上にすることが出来るので非常に効率が高い。DC beam を crystron bunching 方式で、 sine 波を使い、bunched beam を実現出来るが、全 DC beam の 30 % を取り込む事を実現するのは非常に困難だと思う。

100 mA 級の RFQ も実現出来るから ion implantation 用に Cockcroft-Walton type のものに充分対抗できる。DC で使用しないからイオン源を 0 potential のところに設置できる。大型のイオン源を設置することも可能である。

下の図は、実際の RFQ の構造の概念図である。 4 枚の vane に構造があるのが見えるだろう。



以下に、変形ベッセル関数が登場する理由を確認しておこう。円筒座標でのラプラスの方程式は次式で与えられる。

$$\nabla^2\phi = \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \phi = 0$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = -k^2 n^2$ とおくと、

$$\left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - k^2 n^2 \right\} \phi = 0$$

$\phi(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$ と変数分離すると、

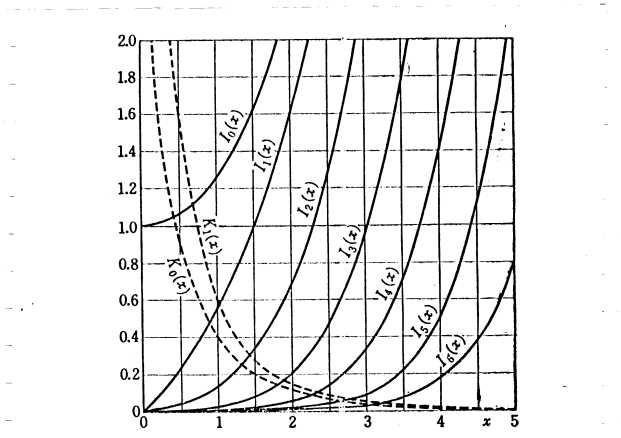
$$\frac{\Theta}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d\,R}{d\,r} \right) + \frac{R}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - k^2 n^2 R\,\Theta = 0$$

であるから、$R\Theta$ で割り、r と θ のみの関数に分けると良い。

一方、変形ベッセル関数は 純虚数を変数とする 通常のベッセル関数であるが、以下の微分方程式で定義される。

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} - (1 + \frac{\nu^2}{z^2})w = 0$$

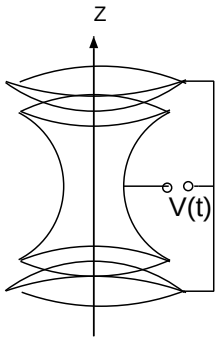
この方程式の原点で正則な解は $I_\nu(z)$ と書かれ、原点で発散する解は $K_\nu(z)$ と書かれる。I の方は計算が簡単だが、K の方は幾らか面倒である。原点付近での振舞いを、岩波の数学公式集から引用しておこう。



第 6.4 図　$I_n(x)$ [$n=0,1,\cdots,6$] および $K_0(x)$, $K_1(x)$ のグラフ

Paul trap

イオン 1 個 (複数も可) を真空中に保持 (漂わせる) する手法に Paul trap や Penning trap がある。



ここでは Mathieu 関数との関連で Paul trap に言及しておこう。図の様な電極 (リング電極 1 個とエンドキャップ電極 2 個) を作り、リング電極とエンドキャップ電極の間に、次の電圧をかける。

$$\phi(r,\, z,\, t) = \frac{V_0 + V_1 \cos\Omega\, t}{r_0^2 + 2\, z_0^2}(r^2 - 2\, z^2)$$

この時の電極間に置かれた電荷 q 質量 m のイオン軌道を考える。

電極の形は、当然の事ながら、等電位面に沿って仕上げる。Lagrangian は以下の通りである。

$$L = \frac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + (r\,\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2\right\} - q\,\phi(r,z,t)$$

オイラーの運動方程式に代入すると、これまでに何度も登場した運動方程式が登場する。

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - 2q\phi\, r$$
$$2mr\dot{(r)}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$
$$m\ddot{z} = 4q\phi\, z$$

例に依って、真中の式から、角運動量の保存則が導かれる。

$r = 0$ の近くから、場にイオンを打ち込むと、角運動量項は非常に小さくなるから、$mr\dot{\theta}^2$ を無視すると、

$$m\ddot{r} = -2q\phi\, r, \qquad m\ddot{z} = +4q\phi\, z$$

Mathieu 関数で表現出来る事を見越して、$\Omega\, t = 2\,\tau$ と独立変数をかえると、

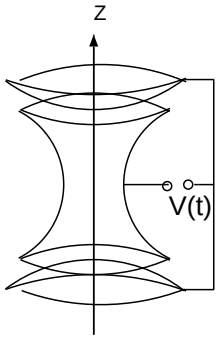
$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = (\lambda_r - 2q_r\cos 2\tau)\, r, \qquad \frac{d^2z}{d\tau^2} = (\lambda_z - 2q_z\cos 2\tau)\, z$$

ここで、

$$\lambda_r = -\frac{4qV_0}{m\Omega^2}, \qquad \lambda_z = -2\lambda_r, \qquad q_r = \frac{4qV_1}{m\Omega^2}, \qquad q_z = -2q_r$$

とおいた。

長時間、単独に原子を保持出来るから、時間標準を作る目的で開発されたと思う。その後、原子やクラスターの性質を調べるのに利用されている様である。 **Paul trap**
イオン 1 個 (複数も可) を真空中に保持 (漂わせる) する手法に Paul trap や Penning trap がある。



ここでは Mathieu 関数との関連で Paul trap に言及しておこう。図の様な電極 (リング電極 1 個とエンドキャップ電極 2 個) を作り、リング電極とエンドキャップ電極の間に、次の電圧をかける。

$$\phi(r,\, z,\, t) = \frac{V_0 + V_1 \cos\Omega\, t}{r_0^2 + 2\, z_0^2}(r^2 - 2\, z^2)$$

この時の電極間に置かれた電荷 q 質量 m のイオン軌道を考える。

電極の形は、当然の事ながら、等電位面に沿って仕上げる。Lagrangian は以下の通りである。

$$L = \frac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + (r\,\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2\right\} - q\,\phi(r,z,t)$$

オイラーの運動方程式に代入すると、これまでに何度も登場した運動方程式が登場する。

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - 2q\phi\, r$$

$$2mr\dot{(r)}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

$$m\ddot{z} = 4q\phi\, z$$

例に依って、真中の式から、角運動量の保存則が導かれる。

$r = 0$ の近くから、場にイオンを打ち込むと、角運動量項は非常に小さくなるから、$mr\dot{\theta}^2$ を無視すると、

$$m\ddot{r} = -2q\phi\, r, \qquad m\ddot{z} = +4q\phi\, z$$

Mathieu 関数で表現出来る事を見越して、$\Omega\, t = 2\,\tau$ と独立変数をかえると、

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = (\lambda_r - 2q_r\cos 2\tau)\, r, \qquad \frac{d^2z}{d\tau^2} = (\lambda_z - 2q_z\cos 2\tau)\, z$$

ここで、

$$\lambda_r = -\frac{4qV_0}{m\Omega^2}, \qquad \lambda_z = -2\lambda_r, \qquad q_r = \frac{4qV_1}{m\Omega^2}, \qquad q_z = -2q_r$$

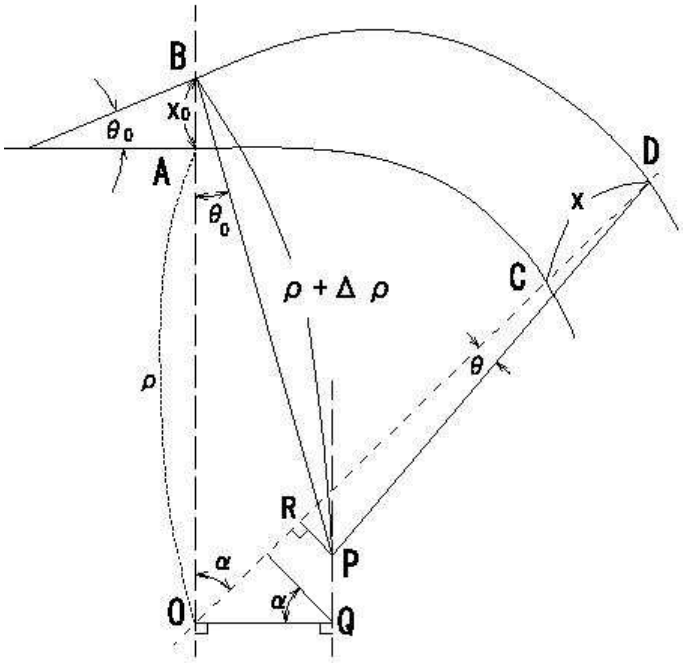
とおいた。

長時間、単独に原子を保持出来るから、時間標準を作る目的で開発されたと思う。その後、原子やクラスターの性質を調べるのに利用されている様である。

均一磁場を用いた偏向と収束

直角入出射の場合

簡単の為に、磁場は磁極の境界線上で、突然に 0 から平均値に、大きさが変化するという (sharp cutoff) 近似を採用する。更にイオンの軌道は磁場中では円であり、磁場の無い領域では直線であると仮定する。中心軌道を考え、この中心軌道からいくらかはずれたイオンの軌道の収束性に付いてこれから考える。



軌道半径を ρ , 偏向角を α とすると中心軌道は $A \to C$ のように曲げられ , A から入って C へ出て行く。これに対し $(\,x\,,\theta\,,\delta\,)$, $\delta \equiv (\rho+\Delta\rho)/\rho - 1$ だけ中心軌道をはずれたビームは , 中心を P とし半径 $BP = \rho + \Delta\rho$ の円弧を描く。(図参照)

AB と PQ を平行 , Q は O から PQ に下した垂線の足とし , 中心軌道から $(x_0\,,\theta_0\,,\delta\,)$ だけ外れた軌道を調べる。磁場では、運動量の大きさは変化しないので、下付の足をつけて δ_0 とは書かない。$AB = x_0$, $\angle$OBP$= \theta_0$ であり , 出口では $CD = x$, $\angle$ODP$= \theta$ とする。

P から OD に下した垂線の足を R とすると , $OC + CD = OR + RD$ であり

(1) $x \equiv CD = OR + RD - OC = OR + (\rho+\Delta\rho)\cos\theta - \rho$　　他方

(2) $OR = OQ\sin\alpha + PQ\cos\alpha$

(3) $OA + AB = \rho + x_0 = PQ + PB\cos\theta_0 = PQ + (\rho+\Delta\rho)\cos\theta_0$

$\therefore\ PQ = \rho + x_0 - (\rho+\Delta\rho)\cos\theta_0$

(4) $OQ = BP\sin\theta_0 = (\rho+\Delta\rho)\sin\theta_0$

(3) , (4) の PQ を (2) に代入することで OR が計算できる。

(5) $OR = (\rho+\Delta\rho)\sin\theta_0\,\sin\alpha + \{\,\rho + x_0 - (\rho+\Delta\rho)\cos\theta_0\,\}\cos\alpha$

この OR を (1) に代入すると x と ρ , $\Delta\rho$ etc の関係が得られる。ここで一次近似を用いると $\theta_0 \ll 1$, $x_0 \ll \rho$, $\Delta\rho \ll \rho$, $\theta \ll 1$ であるから

(6) $x = x_0\,\cos\alpha + \theta_0\,\rho\,\sin\alpha + \Delta\rho\,(1-\cos\alpha)$

θ についての式は $\sin\theta = RP/PD$ とすれば良い。

$$RP = (\rho + \Delta\rho)\sin\theta = OQ\ \cos\alpha - PQ\ \sin\alpha$$
$$= (\rho + \Delta\rho)\sin\theta_0\ \cos\alpha - \{(\rho + x_0) - (\rho + \Delta\rho)\cos\theta_0\ \}\sin\alpha$$
$$(7)\ \theta = -\frac{x_0}{\rho}\ \sin\alpha + \theta_0\ \cos\alpha + \frac{\Delta\rho}{\rho}\ \sin\alpha$$

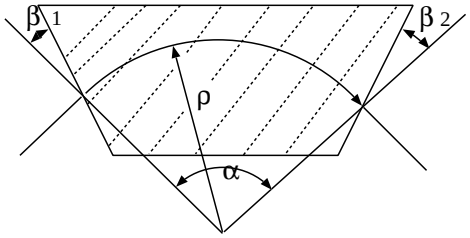
これを行列の形に書くと

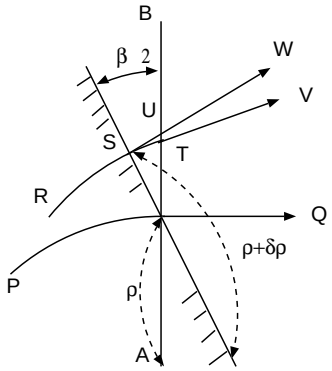
$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \rho\ \sin\alpha & \rho(1-\cos\alpha) \\ -\sin\alpha/\rho & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

斜入・出射の効果

偏向面内での効果と主磁場方向の効果がある。

中心軌道と磁極の法線のなす角度を β_1 , β_2 と書く。β の符号は、図の様に、磁極端での法線の bend 側に中心軌道がある時を正ととる。(図参照)





出口の角度を β_2 だけ傾けた場合

直角出射の場合を少し修正するという立場をとる。

直角出射の場合の磁極の境界を AB , 中心軌道を PEQ とする。この時の tranfer matrix はすでに計算した。この中心軌道から少しはずれた軌道を $RSTV$ とする。この軌道に対応するイオンのパラメータを $(\,x\,,\,\theta\,,\,\delta\,)$ とする。[start 値は $(\,x_0\,,\,\theta_0\,,\,\delta\,)$ である]

磁極境界上の点 E を回転中心とし , 角度 β_2 だけ磁極境界を回転させると , 中心軌道は変わらないが , 一般軌道は RS までは変化なく , 円弧 ST は直線 SU に変化し W の方へ方向が変わる。(図参照)

この時の AB 線上での一般軌道の座標を $(x' = x + \Delta x\,,\theta'\,,\,\delta\,)$ とする。

$$\theta' = \angle OTA + \angle TOS = \theta + \angle TOS, \qquad \Delta x = TU = (\,\rho + \Delta\rho\,)\ \tan(\angle TOS\,) \times \tan(\angle TOS\,))$$

従って $\Delta\, x$ は $O($ 2 次 $)$ の微少量である。

(8) $x' = x$

(9) $\angle TOS = \dfrac{SU}{\rho + \Delta\rho} \cong \dfrac{x\ \tan\beta_2}{\rho + \Delta\rho} \simeq \dfrac{x}{\rho}\ \tan\beta_2$

ゆえに x' は x と同じであるが，$\theta \to \theta + \delta\theta = \theta + \dfrac{x}{\rho}\tan\beta_2$ だけ項がくっついた。この $x,\ \theta$ に (6)，(7) でできる x を代入すると

(10) $\theta' = -\dfrac{x_0}{\rho}\left(\sin\alpha - \cos\alpha\tan\beta_2\right) + \theta_0\left(\cos\alpha + \sin\alpha\tan\beta_2\right) + \delta\left[\sin\alpha + (1-\cos\alpha)\tan\beta_2\right]$

入口角度を β_1 だけ傾けた時は今と同様の議論ができる。結果だけ書くと，
$x'_0 = x\ ,\ \theta'_0 = \theta_0 + x_0\tan\beta_1 \,/\, \rho$ とおきかえれば良い。

まとめ

・[直角入出射の時]

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \rho\sin\alpha & \rho\,(1-\cos\alpha) \\ -\sin\alpha/\rho & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

この Trasfer matrix を $M(\rho\,,\,\alpha)$ と書く。

・[直角入射斜出射の時]

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ \theta'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \theta + \dfrac{x}{\rho}\ \tan\beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{と置きかえる}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ \theta_1 \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \rho\ \sin\alpha & \rho\,(1-\cos\alpha) \\ -\dfrac{1}{\rho}\left(\sin\alpha - \cos\alpha\ \tan\beta_2\right) & \cos\alpha + \sin\alpha\ \tan\beta_2 & \sin\alpha + (1-\cos\alpha)\tan\beta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\tan\beta_2}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times M(\rho,\alpha) \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

・[斜入射直角出射の時]

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x'_0 \\ \theta'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 + x_0\ \tan\beta_1/\rho \end{pmatrix} \quad \text{と置きかえる}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha + \sin\alpha\tan\beta_1 & \rho\sin\alpha & \rho(1-\cos\alpha) \\ -\dfrac{1}{\rho}(\sin\alpha - \cos\alpha\tan\beta_1) & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$= M(\rho,\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\tan\beta_1}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

・[斜入出射の時]

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \theta + \dfrac{x}{\rho}\tan\beta_2 \end{pmatrix}$$

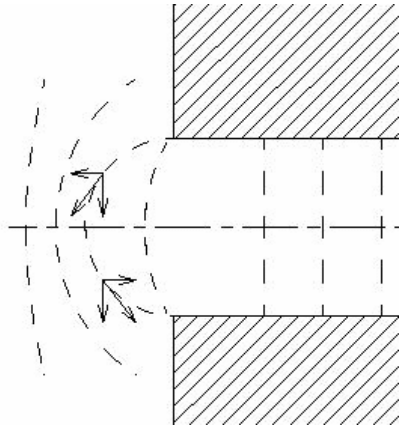
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_0' \\ \theta_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 + \dfrac{x_0}{\rho}\tan\beta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ \theta' \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos\beta_1} & \rho\,\sin\alpha & \rho\,(1-\cos\alpha) \\ \dfrac{\sin(\beta_1+\beta_2-\alpha)}{\rho\,\cos\beta_1\,\cos\beta_2} & \dfrac{\cos\,(\beta_2-\alpha)}{\cos\beta_2} & \sin\alpha + (1-\cos\alpha)\tan\beta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\tan\beta_2}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M(\rho,\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\tan\beta_1}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

斜入出射によるタテ収束の効果

磁極の中央部では一様磁場であっても，出入口付近では磁場はだんだん弱くなりついには 0 になっている。斜入出射効果とこの弱くなる効果が加わると，タテ方向収束性を生ずる。(図参照) この縦収束の効果を調べよう。



主磁場の方向を Y 軸，磁極の端縁に沿って X 軸，イオンの進行方向に X，Y，Z 軸が右手系をなす様に Z 軸を決める。上下の対称面を XZ 面 (Y = 0) ととる。

- 磁石の座標系は大文字の X Y Z
- イオン軌道の座標系は小文字の x y z

を用いる。Y 軸と y 軸は平行であるが、他の X Z 成分は平行ではない。

端縁部の $Y \neq 0$ のところでは磁力線は曲がっているから B の Z 成分が生ずる。y=0 では $B_z = 0$ であるから，B_z を y の級数に展開し，第一項のみをとると

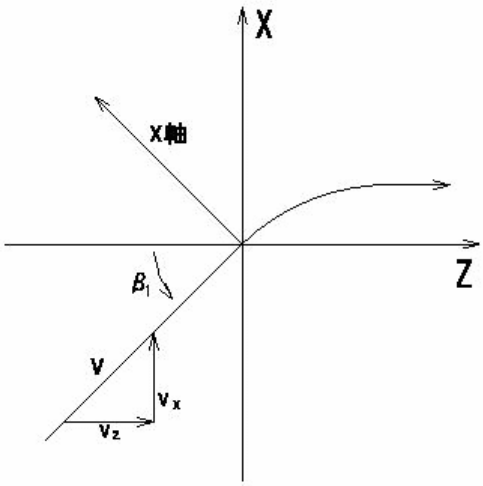
$$B_z(y) = \frac{\partial B_z}{\partial y}\, y = \frac{\partial B_y}{\partial z}\, y$$

ただし，ここで $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ を使った。図示した様に B_z は y の正負により符号を変える。(B_y は定符号である)

斜入射の場合を考える

もう一度座標系を示す。(図参照)

両座標系は y 軸を共有し，x，z 系は X，Z 系を y 軸の周りに β_1 だけ回転したものになっている。入射粒子の速度 v は XZ 面内で v_X 成分を持つことになる。この v_X と上記 B_z により y 軸方向の力が発生し，タテ収束力を生ずる事になる。



もう少し定量的にやってみる。
大文字の座標系を使うと，

$$m\ddot{Y} = q\ (\,v_Z\,B_X - v_X\,B_Z\,) = -q\,v\,\sin\beta_1\,\frac{\partial B_Y}{\partial Z}\ \cdot \mathrm{Y}$$

$$\frac{d}{dt} = v\frac{d}{dz} = v\ \cos\beta_1\,\frac{d}{dZ}$$

という関係式を用いて、独立変数を 時間 t から z に変更する。

$$mv^2\,\cos\beta_1\,\frac{d}{dZ}\left(\frac{dy}{dz}\right) = -q\,v\,\sin\beta_1\ \cdot Y\,\frac{\partial B_y}{\partial Z}$$

Z で積分すると

$$\Delta\left(\frac{dy}{dz}\right) \cong -\frac{q}{p}\ \tan\beta_1\,Y\ \int\frac{\partial B_Y}{\partial Z}\cdot dZ = -\frac{\tan\beta_1}{\rho}\,y$$

但しここで右辺では fringing 場中で v_X や median plane からの高さ y は変わらないとして積分の外に出し $p = q\,B_Y\,\rho$ の関係を使っている。左辺は全て小文字の量であるから，イオンが fringing 場を通過中に y 方向の進行角度がどれだけ偏向を受けたかを示している。右辺に負号があるから $\tan\beta_1 > 0$ ならば収束力を受ける事がこれからわかる。

matrix の形に書くと，入口での斜入射の効果のタテ収束の寄与は

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\tan\beta_1}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。イオンはこの端縁場を通過した後 $\alpha\,\rho$ の距離を走り，更に出口でも同じような収束力を受ける。全体の効果は

$$M_y\,(\,\rho\,,\,\beta_1\,,\,\beta_2\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\tan\beta_2}{\rho} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha\,\rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\tan\beta_1}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\alpha\tan\beta_1 & \alpha\,\rho \\ -\dfrac{1}{\rho}\left(\tan\beta_1+\tan\beta_2\right)+\dfrac{\alpha}{\rho}\,\tan\beta_1+\tan\beta_2 & 1-\alpha\,\tan\beta_2 \end{pmatrix}$$

と書ける。y 方向には δ の寄与は 1 次近似では無視出来るので transfer matrix は 2 行 2 列と考えても良い。

ここで登場したタテ方向の収束力の考え方は、その後、加速器の発展に Q-lens と共に非常に大きなインパクトを与えた。(ビーム強度の増大と電磁石サイズの縮小化)
タテ方向の本質的な部分は B_z が mediam plane 上で 0 でその上下で符号を変える事と v_X が 0 でない事である。$\mathrm{B}_z \neq 0$ という条件は円筒座標系では $\dfrac{\partial B_y}{\partial r} \neq 0$ ならば実現できることは自明であろう。

非一様磁場の 1 次の輸送行列
$n \equiv -\dfrac{r}{B_y}\,\dfrac{\partial B_y}{\partial r}$ を磁場を特徴づける数 (field index) と呼ぶが , これが 0 でなければタテ収束の可能性がある。この時イオンは中心軌道のまわりにヨコ方向には $\sqrt{1-n}$, タテ方向には $\sqrt{n}$ で特徴つけられる様な振動をする。この原理は大立体角のベータ線スペクトログラフ (オレンジ型 , キノコ型) や , ベータトロン , 古典的なサイクロトロン及び高エネルギーの AGS と呼ばれる加速器の主要原理として知られている。

$n \neq$ の transfer matrix は次の様に与えられる。

$$M_x = \begin{pmatrix} C+\dfrac{St_1}{\sqrt{1-n}} & \dfrac{\rho}{\sqrt{1-n}}S & \dfrac{\rho}{1-n}\,(1-C) \\ -\dfrac{1}{\rho}\left[S\left(\sqrt{1-n}-\dfrac{t_1\,t_2}{\sqrt{1-n}}\right)-C\,(t_1+t_2)\right] & C+\dfrac{St_2}{\sqrt{1-n}} & \dfrac{S}{\sqrt{1-n}}+\dfrac{t_2}{1-n}(1-C) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} c-\dfrac{st_1}{\sqrt{n}} & \dfrac{\rho\,s}{\sqrt{n}} \\ -\dfrac{1}{\rho}\left[s\left(\sqrt{n}-\dfrac{t_1\,t_2}{\sqrt{n}}\right)+c\,(t_1+t_2)\right] & c-\dfrac{st_2}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$$

ここで大文字の C と S は M_x にのみ登場し ,

$$C \equiv \cos\left(\sqrt{1-n}\;\alpha\right), \qquad S \equiv \sin\left(\sqrt{1-n}\;\alpha\right)$$

小文字の c と s は M_y のみに登場し ,

$$c \equiv \cos\left(\sqrt{n}\;\alpha\right), \qquad s \equiv \sin\left(\sqrt{n}\;\alpha\right)$$

であり，t_1 と t_2 は M_x，M_y の両方に関係し，

$$t_1 = \tan\beta_1, \qquad t_2 = \tan\beta_2$$

と略記した。

最後にタテ方向には，δ に関係する項は一次では登場しない。

これらの、行列要素は、高次の行列要素と共に、以後の講義で導く。

ここで $n \to 0$ とすれば当然 $n = 0$ の場合になる。computer で transfer matrix を計算する場合には $\mathrm{n} \neq 0$ で $\mathrm{n}=0$ も代表させるのはやめたほうが良い。
$\dfrac{\sin\sqrt{n}\,\alpha}{\sqrt{n}} \to \alpha$ とは必ずしもならないためである。

鏡映場

例えばビームを９０度偏向したいとする。この時、ついでに縦方向の収束性も持たせたい。斜め入出射を考えるが、シム角が大きすぎるのも考えものだとした時、４５度に曲げる磁石を２台直列に繋ぎ、それぞれの磁石に縦収束性を持たせる事がありうる。設計が面倒だから、同一の磁石を使用する。この場合、二つの磁石の中点に関して両者は鏡映の関係にある。点１でのベクトル $\mathbf{x}_1$ に輸送行列 M が作用して、中点でのベクトル $\mathbf{x}_2$ が作られるとする。時間を反転して考えると、今度は逆に $\mathbf{x}_2$ に作用して $\mathbf{x}_1$ を与える行列 M_R を作れば良い。この時間反転に対し、磁場と方向が符号を変える。$\mathbf{x}_i = (x,\ \theta,\ \delta)^T$ とすると、時間反転されたベクトルでは次の様になる。

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \begin{pmatrix} x \\ -\theta \\ \delta \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x_i}$$

更に、次式が成立するから、

$$\mathbf{x}_2 = M\,\mathbf{x}_1, \qquad \tilde{\mathbf{x}}_1 = M_R\,\tilde{\mathbf{x}}_2$$

original transfer matrix を M とすると鏡映場の transfer matrix M_R は

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

($x' \to -x'$　time reversal M^{-1} を使う)

y 方向は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Inverted bending magnet

同じ方向へ続けてまげると、運動量の異なるイオンの飛行距離に差ができる。この差を出来るだけ小さくするには、曲げる方向を両者でかえておく。右へ曲げた後で次の magnet で左

へ曲げたい時，ρ が増す方向を x の向きとしたが，これがひっくり返る。基準ベクトルが $(x, x', \delta) \to (-x, -x', \delta)$ となるから，基本ベクトルに

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をかければよい。transfer matrix には，これも左からかけねばならない。

$$M_I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これらの Transfer matrix を用いれば色々なビーム光学系の設計ができるが，注意すべき点を幾らか挙げておこう。

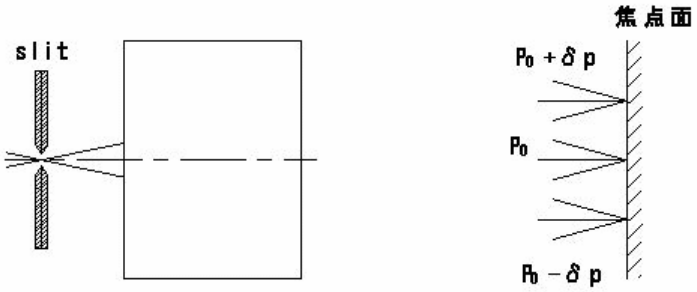
1. momentum matching を行うか行わないか　Dispersion matching
2. kinematic shift をどう逃げるが
3. focal plane が直線に近いか　→ focal plane は長いか短いか
4. beam は focal plane に直角に入るか
5. focal plane 上での必要な位置分解能はいくらか
6. TOF を利用するかしないか

dispersion matching と kinematic shift について

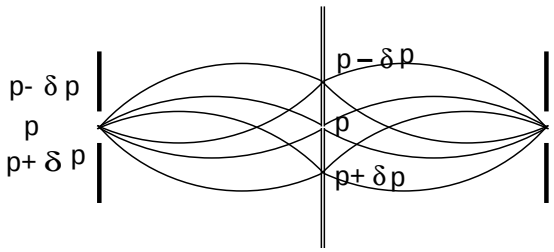
ヨコ方向の収束性を考える時，今までは x, x', δ の 3 つを独立な量として扱ってきたが，現実にはこの 3 つが独立でない場合が知られている。δ が x の函数である場合と δ が x' の函数の場合である。

i) δ が x の函数の場合

加速器から出てきたビームは有限のエネルギーの広がりを持つ。このビームを運動量分散を持つ系で分析すると，焦点面では中心軌道に対応する点のまわりにある分布を持つが，$x>0$ の方に高運動量のビームが収束するならば，反対側 $x<0$ の領域には低運動量成分が収束している。焦点面に slit を置いて P_0 の運動量を持ったイオンだけを使うのも一つの方法であるが，$P_0 \pm \delta P$ のイオンも使えるならばビーム強度の有効利用，低バックグランド化といった点で有効かもしれない。(図参照)



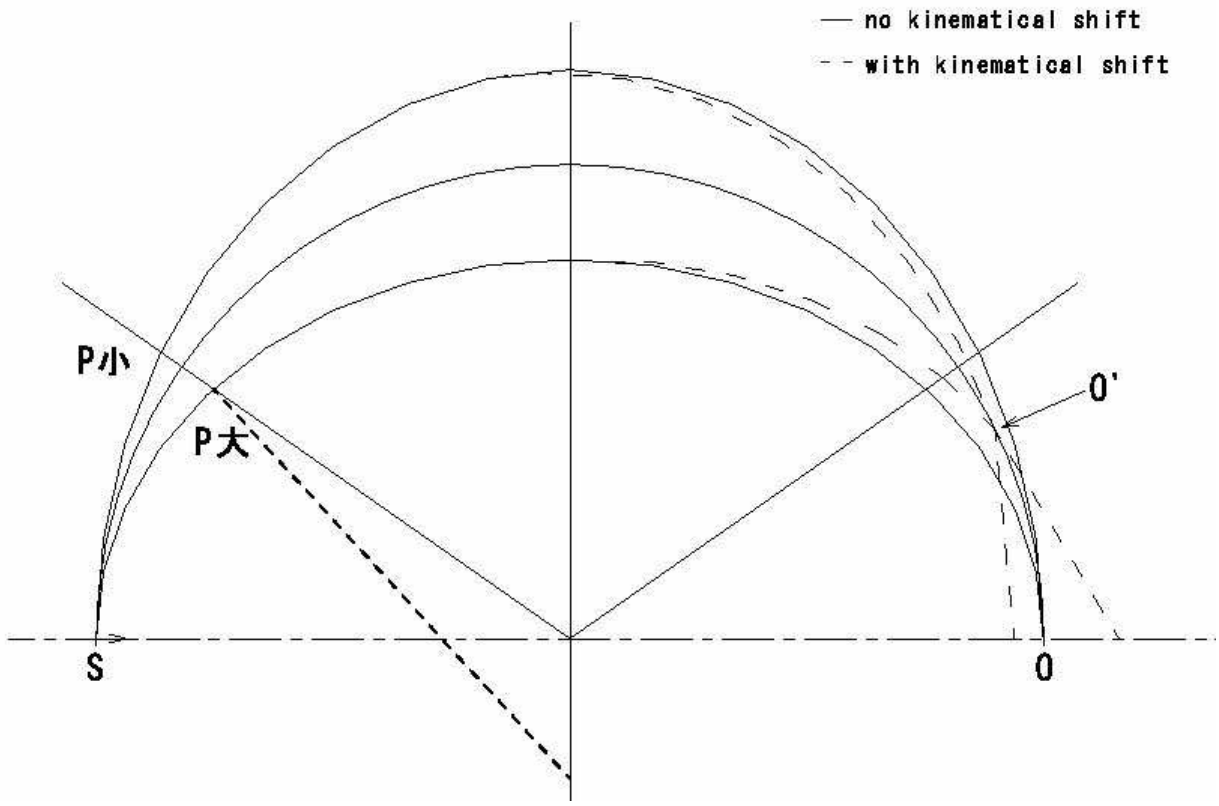
焦点面の下流に運動量分散性の装置を置き，次の焦点面上で一点に収束させるということを考えれば良い。beam transport 系でこの様なアイデアを実現した物を achromatic なビーム輸送系と呼んでいる。一方上記焦点面に標的を置き、この標的から放出された 2 次粒子の運動量分析をするスペクトログラフの焦点上に上記図の 3 つの異なる運動量に対応した散乱イオンを一点に収束させる手法を dispersion matching と呼んでいる。



右から $(x,\ x',\ \delta)^T$ というベクトルのが、第 1 装置に入謝したとする。図では、$x = 0$、運動量が異なる 3 種のビームであるとして、描いている。第 1 装置の輸送行列の第 1 行成分を $(M,\ 0, D)$ だとすると、運動量の異なる 3 個の中間像を結び、第 2 装置へ導かれる。第 2 装置の輸送行列の第 1 行目を $(M',\ 0, D')$ とすると、出口でのベクトルは、$(M', M\,x + (M'D + D')\delta,\ ?, \delta)^T$ となる。そこで、$M'D + D' = 0$ と設計出来ていると、入口でのビームの持つ運動量の大きさの幅の効果を最小に押える事が可能になる。

ii) δ が x' の函数の場合

一次イオンの運動量が一定でも，反応後放出される二次イオンの運動量は，標的残留核の質量が有限ならば反応を特定しても放出方向により運動量が異なる。この結果 δ に x' 依存性が無いとして計算した場合に比較すると，焦点の位置が予定位置より前方又は後方に動いてしまう。これが kinematic shift である。カメラでいう前ピンや後ピンの事である。
前ピンになるか，後ピンになるかは，ビームに対して右へ磁石を置くか左へ置くかとか，中間結像をするかしないか等により変化する。



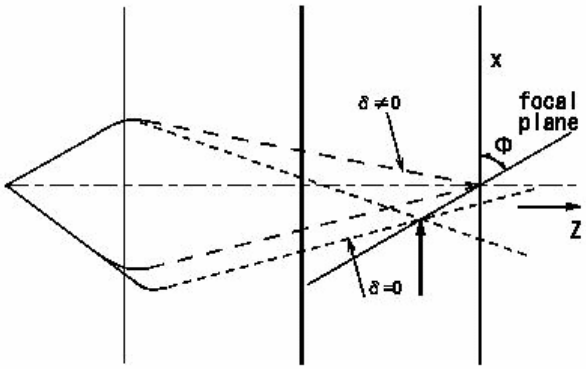
kinematic shift の簡単な対策の一つは focal plane detector を反応と散乱角によって動かす事である。検出器系が複雑な時にはこれはあまり利口な方法ではないが，加速器センターの ESP-90 ではこの方法をとっている。
他の方法は Q-lens の様な中心軌道の左右で反対称な要素を導入することである。$n \neq 0$ dipole field や小さな扇形場でも kinematic correction は可能である。

二次粒子運動量の local な角度依存性を $P(\Theta) = P(\Theta_0) + K(\Theta - \Theta_0)$、$K \equiv \dfrac{\partial P}{\partial \Theta}$ とおくと，散乱イオンを記述するベクトルは $(\, x\,,\, x_0{}'\,,\, \delta + K\, x_0{}')$ となるから，focal plane 上での位置は

$$x_f = M_{11}\, x + (M_{12} + K\, M_{13})\, x_0{}' + M_{13}\, \delta$$

となり，収束条件は $M_{12} = 0$ の変わりに $M_{12} + K\, M_{13} = 0$ となる。K が散乱角や反応に依るから，M_{12} も調節可能にしておかなければならない。散乱角で dispersion が異なるのは好ましくないから M_{13} を変えるのはまずい。

focal plane の傾きについて
target を $(x = 0\,,\, \pm x'\,,\, \delta)$ で出たイオンの軌跡を考えてみる。



中心軌道は $(x=0)$ に収束しているとする。この $Z=0$ の位置での $\delta \neq 0$ イオンの位置と傾きは

$$x_f{}^{\pm} = \pm M_{12}\,(\rho+\Delta\rho)x' + M_{13}(\rho+\Delta\rho)\delta$$

$$x'_f{}^{\pm} = \pm M_{22}\,(\rho+\Delta\rho)x' + M_{23}(\rho+\Delta\rho)\delta$$

で与えられるから，点 $(x_f{}^{\pm},\, Z=0)$ を通る傾き $x'_f{}^{\pm}$ の二本の直線の交点が $\delta \neq 0$ イオンの焦点の位置を与える。

$M_{ij}(\rho+\Delta\rho)$ は行列要素が ρ に依存することを示す。

この座標は

$$x = \left(M_{13} - \frac{M_{23}\,M_{12}}{M_{22}}\right)\delta$$

$$Z = -\frac{M_{12}}{M_{22}}$$

と解ける。$\delta = 0$ のイオンに対しては収束性が実現しているならば $M_{12}(\rho)=0$ であるから

$$M_{12}\,(\rho+\Delta\rho) \cong \frac{\partial M_{12}}{\partial\rho}\,\Delta\rho$$

と書ける。この時 x の第 2 項は 2 次の微少量になるから落としておくと

$$\Phi = \frac{Z}{x} = \frac{-\dfrac{1}{M_{22}}\dfrac{\partial M_{12}}{\partial\rho}\,\Delta\rho}{M_{13}\delta} = -\frac{\rho}{M_{22}\,M_{13}}\,\frac{\partial M_{12}}{\partial\rho}$$

と書ける。ここで $\Delta\,\rho = \rho\,\delta$ を使った。

M_{12} が ρ に依存しないと検出器に直角にイオンが入ってきて一般には好都合である。

運動量が δ だけ異なるイオンは $M_{13}\,\delta$ だけ異なる位置に $M_{11}S$ だけの巾で結像する。ここで S は target 上での beam spot size である。横倍率 M_{11} や S はその積が検出器系の位置

分解能程度に小さいことが望ましい。もしもこれが大きい時にはその分，分散 $M_{13}\delta$ を大きくしなければいけない。

M_{13}/M_{11} が大きいほうがスペクトログラフとしては高分解能である。

TOF

時間的に一様でないビームを用いて時間情報を入手することがある。この時，ビーム輸送系やスペクトログラフ中の飛行距離が異なると，これにより時間情報が崩れて精度が悪くなることがある。Van de Graaff のようなきれいなビーム系ではイオン源からの系全体を時間情報が入手しやすいように設計するが，rf 加速器のような高分解能を望めない加速器では，分散整合と同じような考えで，エネルギーの高い粒子は長距離を又エネルギーの低い粒子は短距離を飛ばせて時間的に収束を得ることができる。ただしこれはビームの時間構造を熟知していることが不可欠である。

エネルギーが低い時にはクライストロン型ビームバンチャーを使う方法もある。これらが利用できない時には仕方がないからビームチョッパーを使う。この様な系と組み合わせた輸送・分析は行列法ではできないから，運動方程式の数値積分法によらなければならない。

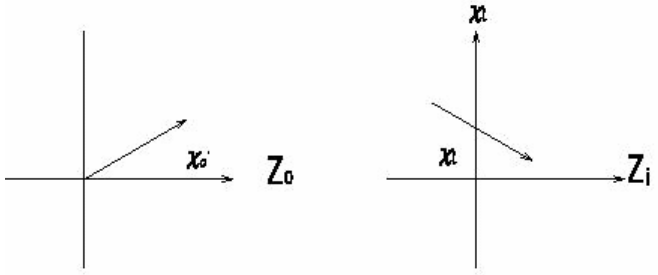
spectrum の line shape について

まず一次元で問題を考えることにする。

物点と像点を記述するパラメータを $(x_0\,, x_0'\,, \delta)$，$(x_i\,, x_i'\,, \delta)$ とすると

$$x_i = f(x_0\,, x_0'\,, \delta)$$

という関係式がある。f は光学系の解析から与えられる。例えば transfer matrix の積としてこの関数 f が与えられると，像点での強度分布が簡単に計算できる。



物点の大きさは充分小さいとして，ここから x_0' 方向の微小角範囲 dx_0' に放出されるイオン数を $dn(x_0')$，物点での角分布関数を $\rho_0(x_0')$ とすると，$dn(x_0')$ は次の式で与えられる。

$$dn(x_0') = \rho_0(x_0')\, dx_0'$$

この $dn(x_0')$ 個のイオンは像点 x_i 付近の中 dx_i の部分に飛んでくるから，ここでの密度

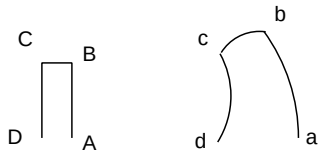
$\rho_i(x_i)$ は

$$dn(x_0') = \rho_0(x_0')dx_0' = \rho_0(x_0')\,\frac{1}{\dfrac{dx_i}{dx_0'}}\,dx_i$$

より

$$\rho_i x_i = \frac{1}{\dfrac{dx_i}{dx_0'}}\,\rho_0(x_0')$$

と与えられる。$\dfrac{dx_i}{dx_0'}$ が 0 又は $(\dfrac{dx_i}{dx_0'})^{-1}$ が発散する点が焦点である。
line spectrum の形は、この $\rho_i(x_i)$ を x_0 に固定し，系の acceptance angle にそって積分すればよい。普通は $\sin x_0'$ がかかるからこの積分は収束する。



例えば図の左の様な長方形領域が図の右の様な領域に写像される事になる。大文字の点が小文字の点に写像されていると思えば良い。直線が直線に写像されるのが、1 次変換であるが、一般的には他の因子、例えば δ が x の関数である、の為に直線も曲線に写像される。

円筒対称場でのイオン光学

ここでは、円筒対称な電場及び磁場中でのイオン光学を、質量分析学会の会誌に松田先生が書かれた講義ノートを引用しつつ紹介する。

参考文献 松田久　　質量分析、 No 25(1964) 47, No26(1964) 105, No 27(1964) 165, No 29(1965) 59, No 30(1965) 123.

円筒対称な電磁場は、円筒座標 (r, ϕ, z) を用い、スカラーポテンシャル ψ とベクトルポテンシャル A_ϕ, $(A_r = A_z = 0)$ を用いて与えられる。

$$H_r = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \quad H_\phi = 0, \quad H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,A_\phi)$$

$$E_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad E_\phi = 0, \quad E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

ここで与えられた、ポテンシャルや電磁場を中心軌道のまわりに、級数展開する。指導原理は、電場 $\mathbf{E}$ に対しては以下の通りである。

1　$\nabla \times \mathbf{E} = 0$
2　$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$
3　円筒対称性
4　上下対称面の存在 (mid. plane symmetry)

磁場の場合にも、ほぼ同様の関係が成立する。但し、電場の場合には、E_r が主たる成分であり、磁場の場合には H_z が主成分であるという相違がある。

磁場の展開

中心軌道の曲率半径を R_0 、z 座標を 0 とし、場は $z=0$ 面に関して上下に面対称であると仮定する。近軸光線を仮定し、

$$r = R_0\,(1+\rho), \quad z = R_0\,\zeta$$

と書き、無次元の独立変数 $\rho,\ \zeta$ を導入する。$z=0$ 面での磁場を次の様に ρ を用いて展開する。

$$H_z(r,0) = H_0\,(1 + n_1\,\rho + n_2\,\rho^2 + n_3\,\rho^3)$$

$$H_r(r,0) = 0$$

円筒対称性を仮定したから、ϕ 依存性は書いていない。$z \neq 0$ では、H_z は z の偶関数であるから、O(3 次) 迄では

$$H_z(r,z) = H_0\{(1 + n_1\rho + n_2\rho^2 + n_3\rho^3) + \zeta^2(\alpha + \beta\rho)\}$$

次に、$H_r(r,z)$ を以下の手順で決めて行く。$\nabla \times \mathbf{H} = 0$ の ϕ 成分より、$\dfrac{\partial H_z}{\partial r} = \dfrac{\partial H_r}{\partial z}$ を用いると、

$$\frac{1}{H_0}\frac{\partial H_r}{\partial \zeta} = \frac{1}{H_0}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} = n_1 + 2n_2\rho + 3n_3\rho^2 + \beta\zeta^2$$

この式を積分すると、

$$H_r(r,z) = H_0\{(n_1 + 2n_2\rho + 3n_3\rho^2)\zeta + \beta\zeta^3/3\}$$

$\alpha,\ \beta$ の形を決めるために、$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ を利用する。

$$0 = H_r + r\left\{\frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right\}$$

であるから、

$$(n_1 + 2n_2\rho + 3n_3\rho^2)\zeta + \beta\,\zeta^3/3 + (1+\rho)\{(2n_2 + 2\alpha)\zeta + (6n_3 + 2\beta)\rho\zeta\} = 0$$

この式の $O(\zeta)$ の係数を取り出すと、

$$n_1 + 2n_2 + 2\alpha = 0, \text{ 即ち} \quad \alpha = -n_1/2 - n_2$$

$O(\rho\zeta)$ の項より、

$$4n_2 + 2\alpha + 6n_3 + 2\beta = 0, \text{ 即ち} \quad \beta = -2n_2 - \alpha - 3n_3 = n_1/2 - n_2 - 3n_3$$

O(3 次) の項は、上で仮定したよりも高次の項からの寄与もありうるので、ここでは、これ以上には考えない。結局、以下の様に決定された。

$$\begin{aligned} H_z(r,z) &= H_0\,[(1 + n_1\rho + n_2\rho^2 + n_3\rho^3) - \zeta^2\{(n_1/2 + n_2) + (n_2 + 3n_3 - n_1/2)\rho\}] \\ H_r(r,z) &= H_0\,[(n_1 + 2n_2\rho + 3n_3\rho^2)\zeta + (n_1 - 2n_2 - 6n_3)\zeta^3/6] \end{aligned}$$

次に、この磁場からベクトルポテンシャルを計算しよう。$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}$ であるが、$H_\phi = 0$ より、A_ϕ だけが 0 でないとしてもよい。

$$H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,A_\phi), \quad H_r = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z}$$

を利用する。H_r が ζ の奇関数であるから、A_ϕ は ζ の偶関数である。

$$A_\phi(r,z) = R_0 H_0 \left[(A + B\rho + C\rho^2 + D\rho^3 + E\rho^4) + \zeta^2(F + G\rho + H\rho^2) + I\zeta^4\right]$$

と、A から I 迄の展開係数を用いて展開したとすると、

$$\begin{aligned} H_r(r,z) &= -\frac{\partial A_\phi}{R_0 \partial \zeta} \\ &= -H_0\{2\zeta(F + G\rho + H\rho^2) + 4\,I\zeta^3\} \\ &= H_0\left[(n_1 + 2n_2\rho + 3n_3\rho^2)\zeta + (n_1 - 2n_2 - 6n_3)\zeta^3/6\right] \end{aligned}$$

この式の両辺を比較する事により、

$$F = -n_1/2, \quad G = -n_2, \quad H = -3n_3/2, \quad I = (6n_3 + 2n_2 - n_1)/24$$

更に、

$$r\,H_z = \frac{\partial}{\partial r}(r\,A_\phi) = A_\phi + r\frac{\partial A_\phi}{\partial r}$$

より、

$$A_\phi = r\left(H_z - \frac{\partial A_\phi}{\partial r}\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} &A + B\rho + C\rho^2 + D\rho^3 + E\rho^4 + \cdots \\ &\quad = (1+\rho)\left\{1 + n_1\rho + n_2\rho^2 + n_3\rho^3 + \cdots - (B + 2C\rho + 3D\rho^2 + 4E\rho^3 + \cdots)\right\} \\ &\quad = (1+\rho)\{(1-B) + (n_1 - 2C)\rho + (n_2 - 3D)\rho^2 + (n_3 - 4E)\rho^3 + \cdots\} \end{aligned}$$

この式の展開係数を比較し、

$$A = 1 - B, \quad B = n_1 - 2C + (1-B), \quad C = n_2 - 3D + (n_1 - 2C), \quad D = (n_3 - 4E) + (n_2 - 3D)$$

これらの式には、自由度があるから、$A = 1/2$ ととると、残りの量は確定する。

$$B = 1/2, \quad C = n_1/2, \quad D = (n_2 - n_1/2)/3, \quad E = (n_3 - n_2/3 + 2n_1/3)/4$$

これで、すべての自由度を使いきったから、ベクトルポテンシャルは、以下の様にきまる。

$$\begin{aligned} A_\phi(r,z) = R_0 H_0/2\,[\,&(1 + \rho + n_1\rho^2 + (2n_2 - n_1)\rho^3/3 + (2n_1 - n_2 + 3n_3)\rho^4/6 \\ &-(n_1 + 2n_2\rho + 3n_3\rho^2)\zeta^2 - (n_1 - 2n_2 - 6n_3)\zeta^4/12] \end{aligned}$$

電場の展開

磁場分布の場合と同じ様に今度は電場を展開する。但し、主成分が今度は E_r となる。

$$\begin{aligned} E_r(r,0) &= E_0(1 + \ell_1\rho + \ell_2\rho^2 + \ell_3\rho^3) \\ E_z(r,0) &= 0 \end{aligned}$$

$z \neq 0$ ならば、E_r は z の偶関数であり、E_z は z の奇関数である。従って、

$$\begin{aligned} E_r(r,z) &= E_0\{(1+\ell_1\rho+\ell_2\rho^2+\ell_3\rho^3)+\zeta^2(A+B\rho)\} \\ E_z(r,z) &= E_0\{(C+D\rho+E\rho^2)\zeta+F\zeta^3\} \end{aligned}$$

A から F の展開係数は、以下の様にして $\ell_i,\ \ (i=1,2,3)$ と関係がつけられる。$\nabla\times\mathbf{E}=0$ の ϕ 成分を取り出すと、

$$\frac{\partial E_z}{\partial\rho}=\frac{\partial E_r}{\partial\zeta}$$

この式に、上の展開式を代入すると、

$$2\zeta(A+B\rho)=(D+2E\rho)\zeta,\quad D=2A,\ \ E=B$$

次に、

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,E_r)+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$

より、

$$E_r+r\left(\frac{\partial E_r}{\partial r}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)=0$$

即ち、

$$\begin{aligned} &-(1+\ell_1\rho+\ell_2\rho^2+\ell_3\rho^3)-\zeta^2(A+B\rho) \\ &\qquad=(1+\rho)\left\{(\ell_1+C)+(2\ell_2+D)\rho+(3\ell_3+E)\rho^2+(B+3F)\zeta^2\right\} \end{aligned}$$

両辺の独立項の係数を比較すると、

$$\begin{aligned} &-1=\ell_1+C && \text{より、} C=-(1+\ell_1) \\ &-\ell_1=\ell_1+C+2\ell_2+D && \text{より、}\ D=1-\ell_1-2\ell_2,\ \ A=(1-\ell_1-2\ell_2)/2 \\ &-\ell_2=2\ell_2+D+3\ell_3+E && \text{より、}\ E=B=-1+\ell_1-\ell_2-3\ell_3 \\ &-A=B+3F && \text{より、}\ F=-(A+B)/3=(1-\ell_1+4\ell_2+6\ell_3)/6 \end{aligned}$$

独立な係数だけにしぼり込むと、電場は以下の様に書ける。

$$\begin{aligned} E_r(r,z) &= E_0\left\{1+\ell_1\rho+\ell_2\rho^2+\ell_3\rho^3+\zeta^2(1-\ell_1-2\ell_2)/2-\zeta^2\rho(1-\ell_1+\ell_2+3\ell_3)\right\} \\ E_z(r,z) &= E_0\left[\{-(1+\ell_1)+(1-\ell_1-2\ell_2)\rho-(1-\ell_1+\ell_2+3\ell_3)\rho^2\}\zeta\right. \\ &\qquad \left.+(1-\ell_1+4\ell_2+6\ell_3)\zeta^3/6\,\right] \end{aligned}$$

電場が計算出来ると、スカラーポテンシャルが計算出来る。

$$\psi(r,z)=E_0\,R_0\left\{(A+B\rho+C\rho^2+D\rho^3+E\rho^4)+\zeta^2(F+G\rho+H\rho^2)+I\,\zeta^4\right\}$$

と置いて、展開係数 A から I をきめていく。

$$E_z=-\frac{\partial\psi}{\partial z}=-E_0\{2\zeta(F+G\rho+H\rho^2)+4I\zeta^3\}$$

両辺の各項の係数を比較すると、

$$F = (1+\ell_1)/2 \qquad G = -(1-\ell_1-2\ell_2)/2$$
$$H = (1-\ell_1+\ell_2+3\ell_3)/2 \qquad I = -(1-\ell_1+4\ell_2+6\ell_3)/24$$

$$E_r = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -E_0\left\{(B+2C\rho+3D\rho^2+4E\rho^3)+\zeta^2(G+2H\rho)\right\}$$

からは、

$$B=-1, \quad C=-\ell_1/2, \quad D=-\ell_2/3,$$
$$E=-\ell_3/4, \quad G=-(1-\ell_1-2\ell_2)/2, \quad H=(1-\ell_1+\ell_2+3\ell_3)/2.$$

定数 A は軌道中心でのポテンシャルの値であり、任意にとって良いから 0 とおく。従って、

$$\begin{aligned}\psi(r,z) \;&= -E_0\,R_0\,[\,(\rho+\ell_1\rho^2/2+\ell_2\rho^3/3+\ell_3\rho^4/4)\\ &\quad -\zeta^2\,\{(1+\ell_1)/2-(1-\ell_1-2\ell_2)\rho/2+(1-\ell_1+\ell_2+3\ell_3)\rho^2/2\}\\ &\quad +(1-\ell_1+4\ell_2+6\ell_3)\zeta^4/24\,]\end{aligned}$$

まとめると、mid-plane 対称性を有する円筒対称な電磁場とポテンシャルは以下の様に、中心軌道のまわりに展開できる。展開の自変数は次の ρ と ζ である。

$$r = R_0\,(1+\rho), \quad z = R_0\,\zeta$$

展開係数 ℓ や n は field index (場の指標) と呼ばれるが、教科書によっては符号が逆の場合もある。

磁場

$z=0$ 面での磁場を次の様に ρ を用いて展開する。

$$\begin{aligned}H_z(r,0) &= H_0\,(1+n_1\,\rho+n_2\,\rho^2+n_3\,\rho^3)\\ H_r(r,0) &= 0\end{aligned}$$

対称面からはずれた位置では、

$$H_z(r,z) = H_0\,[(1+n_1\rho+n_2\rho^2+n_3\rho^3)-\zeta^2\{(n_1/2+n_2)+(n_2+3n_3-n_1/2)\rho\}]$$
$$H_r(r,z) = H_0\,[(n_1+2n_2\rho+3n_3\rho^2)\zeta+(n_1-2n_2-6n_3)\zeta^3/6]$$

従って，ベクトルポテンシャルは，

$$\begin{aligned}A_\phi(r,z) = R_0H_0/2\,[\,&(1+\rho+n_1\rho^2+(2n_2-n_1)\rho^3/3+(2n_1-n_2+3n_3)\rho^4/6\\ &-\zeta^2(n_1+2n_2\rho+3n_3\rho^2)-\zeta^4(n_1-2n_2-6n_3)/12\,]\end{aligned}$$

電場

$z=0$ 面での磁場を次の様に ρ を用いて展開する。

$$E_r(r,z) = E_0\,\{1+\ell_1\rho+\ell_2\rho^2+\ell_3\rho^3+\zeta^2(1-\ell_1-2\ell_2)/2-\zeta^2\rho(1-\ell_1+\ell_2+3\ell_3)\}$$

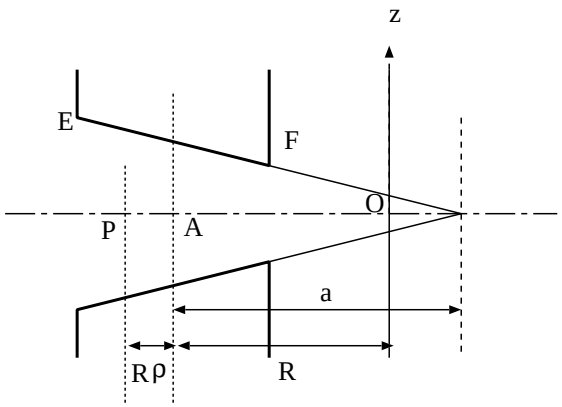
$$E_z(r,z) = E_0\,[\{-(1+\ell_1)+(1-\ell_1-2\ell_2)\rho$$
$$-(1-\ell_1+\ell_2+3\ell_3)\rho^2\}\zeta+(1-\ell_1+4\ell_2+6\ell_3)\zeta^3\,]$$

対称面からはずれた位置では、

$$\psi(r,z) = -E_0\,R_0\,[\,(\rho+\ell_1\rho^2/2+\ell_2\rho^3/3+\ell_3\rho^4/4)$$
$$-\{(1+\ell_1)-(1-\ell_1-2\ell_2)\rho+(1-\ell_1+\ell_2+3\ell_3)\rho^2\}\,\zeta^2/2$$
$$+(1-\ell_1+4\ell_2+6\ell_3)\zeta^4/24\,]$$

展開係数 n, ℓ の物理的意味

まず、磁場の指標 n_1 に付いて、図を見ながら考えよう。



原点 O から上向きに z 軸は出ている。即ち、z 軸が円筒対称な場の対称軸を与えている。中心軌道は、O から距離 R の位置にあり、点 A と名前が付けてある。mid-plane 上の代表点 P は、A から $R\,\rho$ だけ離れた位置にある。太い直線で描かれた上下の磁極は平行ではなく、E、F の延長線は中心軌道から距離 a の位置で対称面との交点を持つ。点 A と P での磁場の強さを比較すると、

$$H(A) \propto 1/a, \quad H(P) \propto 1/(a+R\rho)$$

であり、比例係数は共通であるから、

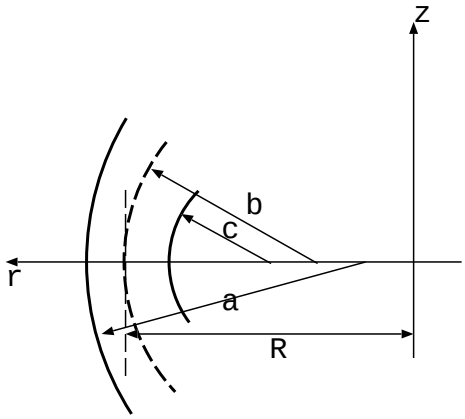
$$H(r,0) = H(\rho=0,0) \times \frac{a}{a+R\,\rho} = H_0(1-\frac{R}{a}\rho+\cdots)$$

従って、

$$n_1 = -\frac{R}{a}$$

$n_2,\ n_3$ 等は、ここでは直線と仮定した磁極断面 EF が、直線でなく、 2 次や 3 次式で表現出来る時に登場する。

次は、電場の場合を図を見ながら考えよう。



z 軸と r 軸を認識した上で、円筒対称な電極は太い実線で描かれているとする。その rz 面で切った断面の曲率半径を $a,\ c$ とする。イオンの中心軌道は z 軸から、半径 R の位置にある。z 軸に直交する面内 (上下対称面内) での中心軌道の曲率半径も R である。 2 枚の電極にはさまれた空間での等ポテンシャル面は、$z = 0$ の近くでは 2 次曲線で近似出来る。$r = R(1 + \rho),\ z = R\zeta$ を通る等ポテンシャル線は、次式を満足する。

$$\rho + \ell\rho^2/2 - (1 + \ell)\zeta^2/2 = const.$$

rz 面での $\rho = 0$ を通る等ポテンシャル面の曲率半径を b とすると、

$$\frac{1}{b} = -\frac{\dfrac{d^2r}{dz^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{dr}{dz}\right)^2\right\}^{3/2}}$$

xy 面内で、曲線 $x(t), y(t)$ が与えられた時、この曲線の曲率 κ は

$$\kappa = (x'y'' - y'x'')/\{(x')^2 + (y')^2\}^{3/2}$$

で与えられた事を思い出そう。上の式と符号が異なるのは、曲率の向きに依る。

今の場合、

$$\frac{dr}{dz} = \frac{d\rho}{d\zeta} = \frac{(1 + \ell)\zeta}{1 + \ell\,\rho}$$

$$\frac{d^2\,r}{dz^2} = \frac{1}{R}\frac{d^2\rho}{d\zeta^2} = \frac{1}{R}\frac{(1 + \ell) - \ell\left(\dfrac{d\rho}{d\zeta}\right)^2}{1 + \ell\rho}$$

これから、$R/b = -(1 + \ell)$ 又は、$\ell = -(1 + R/b)$ 更に、$b = (a + c)/2$ と近似すると、円筒電場では、a や c が無限大であるから、$\ell = -1$、$b = R$ であるような球面場では $\ell = -2$ である。

$\ell_2,\ \ell_3$ は、電極断面が特殊な曲線で作られている時に現れる。

運動方程式

ラグランジアン L は次式による。

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\,mv^2 - e\psi + \frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - e\psi + \frac{e}{c}r\dot{\phi}A_\phi \end{aligned}$$

オイラーの方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

に代入し、$\mathbf{E}$ や $\mathbf{H}$ の定義を用いると、

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\phi}^2 + e\,E_r + \frac{e}{c}r\dot{\phi}H_z \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi} + \frac{e}{c}rA_\phi) &= 0 \\ m\ddot{z} &= e\,E_r - \frac{e}{c}r\dot{\phi}H_r \end{aligned}$$

真中の式はすぐに積分出来、場に入る直前の位置と角速度を $(\mathrm{t}{=}0)$ で、$(r_1,\,\phi_1,\,z_1),\ \dot{\phi}_0$ と書くと、

$$mr^2\dot{\phi} + \frac{e}{c}rA_\phi(r,z) = mr_1^2\dot{\phi}_0 + \frac{e}{c}r_1A_\phi(r_1,z_1)$$

又は、

$$\dot{\phi} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\ \dot{\phi}_0 + \frac{er_1}{mcr^2}A_\phi(r_1,z_1) - \frac{e}{mcr}A_\phi(r,z)$$

以下では、電場と磁場を別々に取り扱う。

円筒対称電場での軌道計算

この場合には、ベクトルポテンシャルは無視出来るから、次の関係式が成立する。

$$\dot{\phi} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\ \dot{\phi}_0$$

$$\frac{m_0\,v_0^2}{a_e} = -eE_0$$

$$v' = v_0(1+\beta),\ \ r_1 = a_e(1+\rho_1),\ \ r_1\dot{\phi}_0 = v'\cos\alpha_r'\,\cos\alpha_z'$$

$$\psi(r,z) = -a_e\,E_0[\rho + \ell_1\rho^2/2 - (1+\ell_1)\zeta^2/2]$$

ここで、a_e は、場の展開時には、R と書かれた中心軌道の曲率半径である。イオンの運動エネルギーは、電場の外と内とでは変化するから、

$$\frac{m\,v'^2}{2} + e\psi = \frac{mv_0^2}{2}$$

但し、左辺が場の中での運動エネルギーであり、右辺は場の外での運動エネルギーである。場の境界で、静電ポテンシャルが急に変化していると考えている。場の内部でのイオンの速度

を 2 次の微小量迄計算すると、

$$(v')^2 = v_0^2(1+\beta)^2 + \frac{2\,a_e\,eE_0}{m}\{\rho_1 + \ell_1\rho_1^2/2 - (1+\ell_1)\zeta_1^2/2\}$$

$$= v_0^2\left\{(1+\beta)^2 - (2\rho_1 + \ell_1\rho_1^2 - (1+\ell_1)\,\zeta_1^2)\right\}$$

従って、

$$v' = v_0\{1+\beta-\rho_1-(1+\ell_1)\rho_1^2/2+\beta\rho_1+(1+\ell_1)\zeta_1^2/2\}$$

次に、$\dot{\phi}_0$ を 2 次迄計算する。

$$\dot{\phi}_0 = \frac{v'\cos\alpha_r'\,\cos\alpha_z'}{a_e(1+\rho_1)}$$

$$= \frac{v_0}{a_e}\left\{1+\beta-2\rho_1+(3-\ell_1)\rho_1^2/2+\beta\rho_1+(1+\ell_1)\zeta_1^2/2\right\}\cos\alpha_r'\,\cos\alpha_z'$$

この量を場の中の任意の位置での角速度に変換すると、

$$\dot{\phi} = (1-2\rho+3\rho^2)(1+2\rho_1+\rho_1^2)\dot{\phi}_0$$

$$= \frac{v_0}{a_e}(1-2\rho+3\rho^2)\left\{1+\beta-(3+\ell_1)\rho_1^2/2+(1+\ell_1)\zeta_1^2/2+2\rho_1\beta_1\right\}\cos\alpha_r'\,\cos\alpha_z'$$

$$= \frac{v_0}{a_e}\left\{1+\beta-2\rho+3\rho^2-(3+\ell_1)\rho_1^2/2+(1+\ell_1)\zeta_1^2/2-\frac{\alpha_r'^2}{2}-\frac{\alpha_z'^2}{2}-2\beta\rho+2\beta_1\rho_1\right\}$$

次の様な展開公式は自明であろうが、書いておく。

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\cdots,\quad \{1+x\}^{1/2} = 1+x/2-x^2/8+\cdots$$

時刻 t を消去して、軌道方程式とする

動径方向の運動方程式をもう一度書いておくと、

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 + eE_r$$

時刻 t を消去するために、次の関係式を使う。

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\frac{d}{d\phi},\quad \frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{d^2}{d\phi^2}\,\dot{\phi}^2 + \ddot{\phi}\frac{d}{d\phi}\right)$$

従って

$$\ddot{r} = a_e\ddot{\rho} = a_e\left(\frac{d^2\rho}{d\phi^2}\dot{\phi}^2 + \frac{d\rho}{d\phi}\ddot{\phi}\right) = r\dot{\phi}^2 + \frac{e}{m}E_r$$

従って

$$\frac{d^2\rho}{d\phi^2} = \frac{r}{a_e} + \frac{e}{ma_e}E_r\dot{\phi}^{-2} - \frac{d\rho}{d\phi}\ddot{\phi}\dot{\phi}^{-2}$$

この運動方程式を変形する訳だが、次の関係式を思い出そう。

$$
\begin{aligned}
r &= a_e(1+\rho) \\
E_r &= E_0\{1+\ell_1\rho+\ell_2\rho^2+(1-\ell_1-2\ell_2)\zeta^2/2\} \\
\dot{\phi} &= \frac{v_0}{a_e}\{\,1+\beta-2\rho+3\rho^2-(3+\ell_1)\rho_1^2/2+(1+\ell_1)\zeta_1^2/2 \\
&\qquad -({\alpha_z'}^2+{\alpha_r'}^2)/2-2\beta\rho+2\beta_1\rho_1\,\} \\
\frac{m_0\,v_0^2}{a_e} &= -e\,E_0
\end{aligned}
$$

まず右辺第 1 項は

$$\frac{r}{a_e}=1+\rho$$

第 2 項は、部品の処理を先行させよう。$e/ma_eE_r\dot{\phi}^{-2}$ の計算には、$(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2$ を用いると

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}^{-2} = \left(\frac{a_e}{v_0}\right)^2 \{\,&1-2\beta+4\rho+3\beta^2-8\beta\rho+6\rho^2+(3+\ell_1)\rho_1^2 \\
&-(1+\ell_1)\zeta_1^2+({\alpha_r'}^2+{\alpha_z'}^2)-4\beta\rho_1\,\}
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\frac{eE_r}{ma_e}\dot{\phi}^{-2} &= \frac{e}{ma_e}E_0\left\{1+\ell_1\rho+\ell_2\rho^2+(1-\ell_1-2\ell_2)\zeta^2/2\right\}\times\{\dot{\phi}^{-2}\} \\
&= -\{\,1-2\beta+4\rho+3\beta^2-8\beta\rho+6\rho^2+(3+\ell_1)\rho_1^2 \\
&\quad -(1+\ell_1)\zeta_1^2+({\alpha_r'}^2+{\alpha_z'}^2)-4\beta\rho_1+\ell_1\rho-2\ell_1\beta\rho \\
&\quad +(4\ell_1+\ell_2)\rho^2+(1-\ell_1-2\ell_2)\zeta^2/2\,\} \\
&= -1+2\beta-(4+\ell_1)\rho-3\beta^2+2(4+\ell_1)\beta\rho \\
&\quad -(6+4\ell_1+\ell_2)\rho^2-(3+\ell_1)\rho_1^2+(1+\ell_1)\zeta_1^2-({\alpha_r'}^2+{\alpha_z'}^2) \\
&\quad +4\beta\rho_1-(1-\ell_1-2\ell_2)\zeta^2/2
\end{aligned}
$$

第 3 項 $\dfrac{d\rho}{d\phi}\ddot{\phi}\dot{\phi}^{-2}$ の計算 。

ρ が 1 次小であるから、$d\rho/d\phi$ も 1 次小である。$\dot{\phi}^{-2}$ は大きさとしては 1 である。

$$
\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \frac{v_0}{a_e}(-2\dot{\rho}+6\rho\dot{\rho}-2\beta\rho) \\
&= -\frac{2v_0}{a_e}(1+2\beta-3\rho)\dot{\rho} = -\frac{2v_0}{a_e}(1+2\beta-3\rho)\frac{d\rho}{d\phi}\dot{\phi} \\
&= -\frac{2v_0}{a_e}(1+2\beta-3\rho)\frac{v_0}{a_e}(1+\beta-2\rho\cdots)\frac{d\rho}{d\phi}
\end{aligned}
$$

であるから、$\ddot{\phi}$ も 1 次小の大きさを持つ。従って、

$$-\frac{d\rho}{d\phi}\ddot{\phi}\dot{\phi}^{-2} = -\frac{d\rho}{d\phi}\left\{-2\left(\frac{v_0}{a_e}\right)^2\frac{d\rho}{d\phi}\right\}\left(\frac{a_e}{v_0}\right)^2\{1-2\beta+4\rho+\cdots\} = 2\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2$$

結局 r 方向の運動方程式は以下の様になる。

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{d\phi^2}+(3+\ell_1)\rho-2\beta &= 2\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2-3\beta^2-({\alpha'_r}^2+{\alpha'_z}^2)-(6+4\ell_1+\ell_2)\rho^2-(3+\ell_1)\rho_1^2\\ &\quad -(1-\ell_1-2\ell_2)\zeta^2/2+(1+\ell_1)\zeta_1^2+2(4+\ell_1)\beta\rho+4\beta\rho_1\end{aligned}$$

次は z 方向の運動方程式を処理しよう。

$$m\ddot{z} = eE_z$$

ここで、

$$E_z = E_0\{-(1+\ell_1)\zeta+(1-\ell_1-2\ell_2)\rho\zeta\}$$

と表せるから、 1 次小である。軌道方程式は、

$$\frac{d^2\zeta}{d\phi^2} = \dot{\phi}^{-2}\frac{eE_z}{ma_e}-\frac{d\zeta}{d\phi}\ddot{\phi}\dot{\phi}^{-2}$$

と書ける。この第 1 項は、

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^{-2}\frac{eE_z}{ma_e} &= \left(\frac{a_e}{v_0}\right)^2\{1-2\beta+4\rho\}\frac{eE_0}{ma_e}\{-(1+\ell_1)\zeta+(1-\ell_1-2\ell_2)\rho\zeta\}\\ &= \{(1+\ell_1)(\zeta-2\beta\zeta+4\rho\zeta)-(1-\ell_1-2\ell_2)\rho\zeta\}\end{aligned}$$

第 2 項は、

$$-\frac{d\zeta}{d\phi}\ddot{\phi}\dot{\phi}^{-2}$$

の計算で、$d\zeta/d\phi$ は 1 次小であり、$\ddot{\phi}$ も 1 次小であることに注意すると、

$$-\frac{d\zeta}{d\phi}\left\{-2\left(\frac{v_0}{a_e}\right)^2\frac{d\rho}{d\phi}\right\}\left(\frac{a_e}{v_0}\right)^2 = 2\frac{d\zeta}{d\phi}\frac{d\rho}{d\phi}$$

と書き換えられる。従って、z 方向の運動方程式は以下の様になる。

$$\frac{d^2\zeta}{d\phi^2} = (1+\ell_1)\zeta-(1-\ell_1-2\ell_2)\rho\zeta-2(1+\ell_1)(\beta-2\rho)\zeta+2\frac{d\zeta}{d\phi}\frac{d\rho}{d\phi}$$

運動方程式を解く

1 次の運動方程式を解いて、この解を 2 次の方程式の駆動項に代入するという手法を用いる。先ず、 1 次の運動方程式を書き下す。

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{d\phi^2} &= -(3+\ell_1)\rho+2\beta\\ \frac{d^2\zeta}{d\phi^2} &= (1+\ell_1)\zeta\end{aligned}$$

動径方向の解を処理する為に、新しいパラメータを導入する。

$$\kappa_r^2 \equiv 3 + \ell_1, \;\; 2\beta \equiv \kappa_r^2 \delta$$

この結果、動径方向の微分方程式は以下の様に変形できる。

$$\frac{d^2\rho}{d\phi^2} = -\kappa_r^2(\rho - \delta)$$

場への入口 $\phi = 0$ での境界条件を以下の様にきめる。

$$\rho = \rho_1, \; \frac{d\rho}{d\phi} = \alpha_r'$$

この境界条件を満足する解は、以下の通りである。

$$\rho^{(1)} = \frac{\alpha_r'}{\kappa_r} \sin(\kappa_r \phi) + \{1 - \cos(\kappa_r \phi)\}\, \delta + \rho_1 \cos(\kappa_r \phi)$$

縦 (z) 方向の解は、$\kappa_z^2 \equiv -(1 + \ell_1) > 0$ ならば、$\phi = 0$ での境界条件 $\zeta = \zeta_1, \; \dfrac{d\zeta}{d\phi} = \alpha_z'$ を満足する解は、

$$\zeta^{(1)} = \frac{\alpha_z'}{\kappa_z} \sin(\kappa_z \phi) + \zeta_1 \cos(\kappa_z \phi)$$

2 次の横方向の解

2 次の横 (動径) 方向の運動方程式は、 2 次の駆動項である右辺には 1 次の解を代入すると次の形になる。

$$\frac{d^2\rho}{d\phi^2} + \kappa_r^2 \rho = f(\phi)$$

ここで、右辺は以下の ϕ の関数である。

$$\begin{aligned} f(\phi) = \;& A_1 \sin \kappa_r \phi + A_2 \cos \kappa_r \phi + A_3 \sin^2 \kappa_r \phi + A_4 \cos^2 \kappa_r \\ & + A_5 \sin 2\kappa_r \phi + A_6 \sin 2\kappa_z \phi + A_7 \cos 2\kappa_z \phi + A_8 \end{aligned}$$

$A_6,\ A_7$ の三角関数の引数には κ_r ではなく κ_z が登場している事に注意せよ。

先に与えた運動方程式と比較すると、

$$A_1 = \frac{2}{\kappa_r}(1 + \kappa_r^2 + 2C)\alpha_r'\beta, \qquad A_2 = 2(1 + \kappa_r^2 + 2C)(\beta\rho_1 - D)$$

$$A_3 = C\alpha_r'^2 + 8D + 2\kappa_r^2\rho_1^2 - 8\beta\rho_1, \qquad A_4 = 2\alpha_r'^2 + 4CD + A\rho_1^2 - 4C\beta\rho_1$$

$$A_5 = \frac{2}{\kappa_r}\alpha_r'\{(2 - C)\beta - \kappa_r(2 - C)\rho_1\}, \quad A_6 = \frac{B}{2\kappa_z}\alpha_z'\zeta_1$$

$$A_7 = \frac{B}{4}\left(\zeta_1^2 - \frac{\alpha_z'^2}{\kappa_z^2}\right)$$

$$A_8 = 2\beta - \alpha_r'^2 + \beta^2 + 4(C + 1) + \left(\frac{B}{4\kappa_z^2} - 1\right)\alpha_z'^2 - \kappa_r^2\rho_1^2 + \left(\frac{B}{4} - \kappa_z^2\right)\zeta_1^2 + 4\beta\rho_1$$

$$A \equiv -(6 + 4\ell_1 + \ell_2), \quad B \equiv -(1 - \ell_1 - 2\ell_2)$$

$$C \equiv \frac{A}{\kappa_r^2}, \qquad\qquad D \equiv \frac{\beta^2}{\kappa_r^2}$$

この方程式を解くわけだが、解を以下の形に仮定する。

$$\begin{aligned}\rho = \quad & C_1 \sin \kappa_r\phi + C_2 \cos \kappa_r\phi + \phi\,(C_3 \sin \kappa_r\phi + C_4 \cos \kappa_r\phi) \\ & + C_5 \sin^2 \kappa_r\phi + C_6 \cos^2 \kappa_r\phi + C_7 \sin 2\kappa_r\phi \\ & + C_8 \sin 2\kappa_z\phi + C_9 \cos 2\kappa_z\phi + C_{10}\end{aligned}$$

$C_3,\ C_4$ という項の存在に注意せよ。この項は、円形加速器ではイオンが歳差運動をする項として要注意の項である。この解を上の方程式に代入し、独立項の係数を比較して、展開係数を確定する。境界条件 $\phi = 0$ で、$\rho = \rho_1,\ \alpha_r' = \dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{1}{1+\rho_1}\dfrac{d\rho}{d\phi}$ を満足する解は、以下の通りである。

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\alpha_r'}{\kappa_r}(1+\rho_1) + \frac{A_1}{2\kappa_r^2} + \frac{2A_5}{3\kappa_r^2} - \frac{2\kappa_z A_6}{\kappa_r(2-5\kappa_z^2)} \\
C_2 &= \rho_1 - \frac{2A_3 + A_4}{3\kappa_r^2} - \frac{A_7}{2-5\kappa_z^2} - \frac{A_8}{\kappa_r^2} \\
C_3 &= \frac{A_2}{2\kappa_r} \\
C_4 &= -\frac{A_1}{2\kappa_r} \\
C_5 &= \frac{A_3 + 2A_4}{3\kappa_r^2} \\
C_6 &= \frac{2A_3 + A_4}{3\kappa_r^2} \\
C_7 &= -\frac{A_5}{3\kappa_r^2} \\
C_8 &= \frac{A_6}{2-5\kappa_z^2} \\
C_9 &= \frac{A_7}{2-5\kappa_z^2} \\
C_{10} &= \frac{A_8}{\kappa_r^2}
\end{aligned}$$

$C_1,\ C_2$ は境界条件を考慮しないと確定しない。(方程式に代入すると、両辺で相殺してしまう。) 次の様になる。

$$\rho(\phi = 0) = \rho_1 = C_2 + C_6 + C_9 + C_{10}$$

$$\frac{d\rho}{d\phi}(\phi = 0) = \kappa_r C_1 + C_4 + 2\kappa_r C_7 + 2\kappa_z C_8 = (1+\rho_1)\alpha_r'$$

これらの式から $C_1,\ C_2$ はきまる。

場の出口での値と輸送行列要素

解に、ϕ として、出口での値として Φ を代入すると良い。輸送行列は、$\dfrac{d\rho}{d\phi}$ の値も計算する

必要がある。出口での座標を $a_e\rho_2$、角度を

$$\alpha_r'' = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\phi} = \frac{1}{1+\rho_2}\frac{d\rho}{d\phi} = (1-\rho_2)\frac{d\rho}{d\phi}|_{\phi=\Phi}$$

とおくと、次の様になる。

$$\begin{aligned}\rho_2 = \;& D_1\alpha_r' + D_2\beta + D_4\rho_1 + D_{11}\alpha_r'^2 + D_{12}\alpha_r'\beta + D_{22}\beta^2 \\ & + D_{33}\alpha_z'^2 + D_{44}\rho_1^2 + D_{55}\zeta_1^2 + D_{14}\alpha_r'\rho_1 + D_{24}\beta\rho_1 + D_{35}\alpha_z'\zeta_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_r'' = \;& E_1\alpha_r' + E_2\beta + E_4\rho_1 + E_{11}\alpha_r'^2 + E_{12}\alpha_r'\beta + E_{22}\beta^2 \\ & + E_{33}\alpha_z'^2 + E_{44}\rho_1^2 + E_{55}\zeta_1^2 + E_{14}\alpha_r'\rho_1 + E_{24}\beta\rho_1 + E_{35}\alpha_z'\zeta_1\end{aligned}$$

右辺を見ると、輸送行列の構造が想像されるだろう。さて、具体的な展開係数 (行列要素) の式を以下に書き下そう。

$$D_1 = \frac{\sin\kappa_r\Phi}{\kappa_r},\quad D_2 = \frac{2(1-\cos\kappa_r\Phi)}{\kappa_r^2},\quad D_4 = \cos\kappa_r\Phi$$

$$\begin{aligned}
D_{11} =\;& \frac{1}{3\kappa_r^2}\left\{(1-2C)\cos\kappa_r\Phi + (2\sin^2\kappa_r\Phi - 1) + \frac{A}{\kappa_r^2}(1+\cos^2\kappa_r\Phi)\right\} \\
D_{22} =\;& \frac{1}{3\kappa_r^2}\left(3 + \frac{28}{\kappa_r^2} + \frac{16A}{\kappa_r^4}\right)(1-\cos\kappa_r\Phi) - \frac{2}{\kappa_r^3}\left(1 + \frac{1}{\kappa_r^2} + \frac{2A}{\kappa_r^4}\right)\Phi\sin\kappa_r\Phi \\
& + \frac{4}{3\kappa_r^4}\left(\frac{A}{\kappa_r^2} - 2\right)\sin^2\kappa_r\Phi \\
D_{33} =\;& \frac{1}{\kappa_r^2}\left\{\left(1 - \frac{B}{5\kappa_z^2-2}\right) + \cos\kappa_r\Phi + \left(\frac{B}{4\kappa_z^2} - 1\right)\right\} + \frac{B}{4\kappa_z^2(5\kappa_z^2-2)}\cos 2\kappa_z\Phi \\
D_{44} =\;& -\frac{1}{3}\left\{\left(1 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\cos\kappa_r\Phi + \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\right\} + \frac{1}{3\kappa_r^2}\left(A\sin^2\kappa_r\Phi + 2\cos^2\kappa_r\Phi\right) \\
D_{55} =\;& \frac{1}{\kappa_r^2}\left\{\left(\frac{B}{4} - \kappa_z^2\right) + \kappa_z^2\cos\kappa_r\Phi\right\} - \frac{B}{4(5\kappa_z^2-2)}\left\{2\frac{(3\kappa_z^2-2)\cos\kappa_r\Phi}{\kappa_r^2} + \cos 2\kappa_z\Phi\right\} \\
D_{12} =\;& \frac{1}{\kappa_r}\left(1 + \frac{11}{3\kappa_r^2} + \frac{2A}{3\kappa_r^4}\right)\sin\kappa_r\Phi - \left(1 + \frac{1}{\kappa_r^2} + \frac{2A}{\kappa_r^4}\right)\Phi\cos\kappa_r\Phi \\
& - \frac{2}{3\kappa_r^3}\left(2 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\sin 2\kappa_r\Phi \\
D_{14} =\;& \frac{1}{3\kappa_r}\left\{\left(\frac{2A}{\kappa_r^2} - 1\right)\sin\kappa_r\Phi + \left(2 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\sin 2\kappa_r\Phi\right\} \\
D_{24} =\;& \frac{4}{3\kappa_r^2}\left\{\left(1 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\cos\kappa_r\Phi + \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) - 2\cos^2\kappa_r\Phi\right\} \\
& + \left(\frac{1}{\kappa_r} + \kappa_r + \frac{2A}{\kappa_r^3}\right)\Phi\sin\kappa_r\Phi - \frac{4A}{3\kappa_r^4}\sin^2\kappa_r\Phi \\
D_{35} =\;& \frac{B}{5\kappa_z^2-2}\left(\frac{1}{\kappa_r}\sin\kappa_r\Phi - \frac{1}{2\kappa_z}\sin 2\kappa_z\Phi\right)
\end{aligned}$$

次は、角度に関する行列要素の計算結果。

$$
\begin{aligned}
E_1 =&\ \cos\kappa_r\Phi,\ \ E_2 = \frac{2}{\kappa_r}\sin\kappa_r\Phi,\ \ E_4 = -\kappa_r\sin\kappa_r\Phi \\
E_{11} =&\ \frac{1}{3\kappa_r}\left(2C-1\right)\left(\sin\kappa_r\Phi - \frac{1}{2}\sin 2\kappa_r\Phi\right) \\
E_{22} =&\ \frac{1}{\kappa_r}\left(-1+\frac{10}{3\kappa_r^2}+\frac{4A}{3\kappa_r^4}\right)\sin\kappa_r\Phi + \frac{2}{3\kappa_r^3}\left(\frac{2A}{\kappa_r^2}-1\right)\sin 2\kappa_r\Phi \\
&-2\left(1+\frac{1}{\kappa_r^2}+\frac{2A}{\kappa_r^4}\right)\Phi\cos\kappa_r\Phi \\
E_{33} =&\ \frac{1}{\kappa_r}\left(\frac{B}{5\kappa_z^2-2}-1\right)\sin\kappa_r\Phi - \frac{B}{2\kappa_z(5\kappa_z^2-2)}\sin 2\kappa_z\Phi \\
E_{44} =&\ \frac{1}{3}\left\{\left(\kappa_r+\frac{A}{\kappa_r}\right)\sin\kappa_r\Phi + \left(\frac{A}{\kappa_r}-\frac{\kappa_r}{2}\right)\sin 2\kappa_z\Phi\right\} \\
E_{55} =&\ \frac{B}{2(5\kappa_z^2-2)}\left(\frac{3\kappa_z^2-2}{\kappa_r}\sin\kappa_r\Phi + \kappa_z\sin 2\kappa_z\Phi\right) - \frac{\kappa_z^2}{\kappa_r}\sin\kappa_r\Phi \\
E_{12} =&\ \frac{2}{3\kappa_r^2}\left(1-\frac{2A}{\kappa_r^2}\right)\left(\cos\kappa_r\Phi-\cos 2\kappa_r\Phi\right) + \left(\kappa_r+\frac{1}{\kappa_r}+\frac{2A}{\kappa_r^3}\right)\Phi\sin\kappa_r\Phi \\
E_{14} =&\ \frac{1}{3}\left(\frac{2A}{\kappa_r^2}-1\right)\left(\cos\kappa_r\Phi-\cos 2\kappa_r\Phi\right) \\
E_{24} =&\ \frac{1}{\kappa_r}\left(\frac{5}{3}+\kappa_r^2+\frac{2A}{3\kappa_r^2}\right)\sin\kappa_r\Phi + \frac{2}{3\kappa_r}\left(1-\frac{2A}{\kappa_r^2}\right)\sin 2\kappa_r\Phi + \left(1+\kappa_r^2+\frac{2A}{\kappa_r^2}\right)\Phi\cos\kappa_r\Phi \\
E_{35} =&\ \frac{B}{5\kappa_z^2-2}(\cos\kappa_r\Phi-\cos 2\kappa_z\Phi)
\end{aligned}
$$

非零要素との対応

$C_i\ (i=1,\cdots,10)$ の非零要素の登場具合輸送行列へどの項が寄与しているかの判断材料としての意味があるだろう。

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
α_r'	Y									
β		Y								Y
ρ_1		Y								
$\alpha_r'^2$		Y			Y	Y				Y
β^2		Y	Y		Y	Y				Y
$\alpha_z'^2$		Y							Y	Y
ρ_1^2		Y			Y	Y				Y
ζ_1^2		Y							Y	Y
$\alpha_r'\beta$	Y			Y			Y			
$\alpha_r'\rho_1$	Y						Y			
$\beta\rho_1$		Y	Y		Y	Y				Y
$\alpha_Z'\zeta_1$	Y							Y		

磁場のみがある場合の 2 次の計算

今度は、角速度の計算にベクトルポテンシャルの寄与も考える必要がある。次の 4 式から出

発する。

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} = &\ \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \dot{\phi}_0 - \frac{e}{mcr} A_\phi(r,z) + \frac{er_1}{mcr^2} A_\phi(r_1,z_1) \\
\frac{m_0 v_0}{a_m} = &\ -\frac{eH_0}{c} \\
v = &\ v_0(1+\beta),\ \ r_1 = a_m(1+\rho_1),\ \ r_1\dot{\phi}_0 = v\cos\alpha'_r\cos\alpha'_z \\
A_\phi(r,z) = &\ \frac{a_m H_0}{2}\left\{1+\rho+n_1(\rho^2-\zeta^2)\right\}
\end{aligned}$$

角速度を無次元の微小量で表現する。

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} = &\ \left(\frac{1+\rho_1}{1+\rho}\right)^2 \dot{\phi}_0 - \frac{e}{mca_m(1+\rho)}\frac{a_m H_0}{2}\left\{1+\rho+n_1(\rho^2-\zeta^2)\right\} \\
&+\frac{ea_m(1+\rho_1)}{mca_m^2(1+\rho)^2}\frac{a_m H_0}{2}\left\{1+\rho_1+n_1(\rho_1^2-\zeta_1^2)\right\}
\end{aligned}$$

この第 1 項の処理

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\rho_1}{1+\rho}\right)^2 &= (1+2\rho_1+\rho_1^2)(1-2\rho+3\rho^2) \\
&= 1-2(\rho-\rho_1)+(3\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1)
\end{aligned}$$

第 2 項

$$\begin{aligned}
\frac{1+\rho+n_1\rho^2-n_1\zeta^2}{1+\rho} &= (1-\rho+\rho^2)(1+\rho+n_1\rho^2-n_1\zeta^2) \\
&= 1+n_1(\rho^2-\zeta^2)
\end{aligned}$$

第 3 項

$$\begin{aligned}
\frac{(1+\rho_1)\{1+\rho_1+n_1(\rho_1^2-\zeta_1^2)\}}{(1+\rho)^2} &= (1-2\rho+3\rho^2)(1+\rho_1)\{1+\rho_1+n_1(\rho_1^2-\zeta_1^2)\} \\
&= 1-2\rho+2\rho_1+(3\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1)+n_1(\rho_1^2-\zeta_1^2)
\end{aligned}$$

これらの式を代入すると、

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} = &\ \{1-2(\rho-\rho_1)+(3\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1)\}\dot{\phi}_0 \\
&-\frac{eH_0}{2mc}\left\{2(\rho-\rho_1)+n_1(\rho^2-\rho_1^2-\zeta^2+\zeta_1^2)-(3\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1)\right\}
\end{aligned}$$

ここで、$\dfrac{eH_0}{2mc} = -\dfrac{v_0}{2a_m}$ でおきかえる。また、$\dot{\phi}_0$ を v_0/a_m と関係付けたい。

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_0 &= \frac{v}{r_1}\cos\alpha'_r\cos\alpha'_z = \frac{v_0(1+\beta)}{a_m(1+\rho_1)}\left(1-\frac{\alpha'^2_r}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha'^2_z}{2}\right) \\
&= \frac{v_0}{a_m}(1+\beta-\rho_1-\frac{\alpha'^2_r}{2}-\frac{\alpha'^2_z}{2}+\rho_1^2-\beta\rho_1)
\end{aligned}$$

$\dot{\phi}$ を v_0/a_m で括ると、

$$\dot{\phi} = \frac{v_0}{a_m}\{ \quad 1+\beta-\rho-\frac{\alpha_r'^2}{2}-\frac{\alpha_z'^2}{2}+\frac{n_1+3}{2}\rho^2-\frac{n_1+1}{2}\rho_1^2$$

$$-\frac{n_1}{2}(\zeta^2-\zeta_1^2)-2\beta\rho+\beta\rho_1\ \}$$

運動方程式をもう一度書くと、

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\phi}^2+\frac{e}{c}r\dot{\phi}H_z \\ m\ddot{z} &= -\frac{e}{c}r\dot{\phi}H_r \end{aligned}$$

2 次の近似では、次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} H_z &= H_0\{1+n_1\rho+n_2\rho^2-(n_1+2n_2)\zeta^2/2\} \\ H_r &= H_0(n_1\zeta+2n_2\rho\zeta) \end{aligned}$$

$$A_\phi = \frac{aH_0}{2}\left\{1+\rho+n_1(\rho^2-\zeta^2)+(2n_2-n_1)\rho^3/3-2n_2\rho\zeta^2\right\}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{v_0}{a}\{\ 1+\beta-\rho-(\alpha_r'^2+\alpha_z'^2)/2+(n_1+3)\rho^2/2-(n_1+1)\rho_1^2/2 \\ &\quad -n_1(\zeta^2-\zeta_1^2)/2-2\beta\rho+\beta\rho_1\ \} \end{aligned}$$

$$\frac{m_0v_0}{a} = -\frac{eH_0}{c}$$

時間微分は、角度微分で書き換える。

$$\frac{d^2}{dt^2}\to\left(\frac{d^2}{d\phi^2}\dot{\phi}^2+\frac{d}{d\phi}\ddot{\phi}\right)$$

具体的に書くと、

$$\frac{d^2\rho}{d\phi^2} = -\frac{d\rho}{d\phi}\ddot{\phi}\dot{\phi}^{-2}+\frac{r}{a_m}+\frac{er}{mca_m}\dot{\phi}^{-1}H_z$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\phi^2} = -\frac{d\zeta}{d\phi}\ddot{\phi}\dot{\phi}^{-1}-\frac{er}{mca_m}\dot{\phi}^{-1}H_r$$

2 次の微小量まで、展開する。$d\rho/d\phi,\ d\zeta/d\phi$ は 1 次の微小量だから、$\ddot{\phi},\ \dot{\phi}^{-2}$ は 1 次まで、$\dot{\phi}^{-1}$ は 2 次まで計算すればよい。

$$\ddot{\phi} = -\left(\frac{v_0}{a_m}\right)^2 \frac{d\rho}{d\phi},$$

$$\dot{\phi}^{-1} = \frac{v_0}{a_m}\{\, 1+\beta+\rho+(\alpha_r'^2+\alpha_z'^2)/2-(n_1+1)(\rho^2-\rho_1^2)/2$$

$$+n_1(\zeta^2-\zeta_1^2)/2-\beta\rho_1+\beta^2\,\}$$

$$\dot{\phi}^{-2} = \left(\frac{a_m}{v_0}\right)^2 \{1-2\beta+2\rho\}$$

動径方向の運動方程式において、
第 1 項では

$$-\frac{d\rho}{d\phi}\ddot{\phi}\dot{\phi}^{-2} = \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2$$

第 2 項では

$$\frac{r}{a_m} = 1+\rho$$

第 3 項では

$$\{\quad -1+\beta-(2+n_1)\rho-\frac{\alpha_z'^2+\alpha_r'^2}{2}-(1+3n_1+2n_2)\rho^2/2-(1+n_1)\rho_1^2/2$$
$$-n_2\zeta^2-n_1\zeta_1^2/2-\beta\rho_1+\beta^2-(n_1+1)\beta\rho\,\}$$

まとめると、横方向の運動方程式は次の様になる。

$$\frac{d^2\rho}{d\phi^2}+(1+n_1)\rho-\beta = \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2-\frac{\alpha_r'^2+\alpha_z'^2}{2}-\beta^2-(1+3n_1+2n_2)\rho^2/2$$
$$-(1+n_1)\rho_1^2/2+n_2\zeta^2+n_1\zeta_1^2+(1+n_1)\beta\rho+\beta\rho_1$$

次は、横 (z) 方向の 2 次の運動方程式を書き下す。

$$\frac{d^2\zeta}{d\phi^2}-n_1\zeta = \frac{d\zeta}{d\phi}\frac{d\rho}{d\phi}-n_1\beta\zeta+4n_2\rho\zeta$$

注意：これらの運動方程式で $\beta=0$ とし、 1 次近似に持ち込むと、

$$\frac{d^2\rho}{d\phi^2} = -(1+n_1)\rho,\quad \frac{d^2\zeta}{d\phi^2} = n_1\zeta$$

であるが、この式は $(1+n_1) > 0,\ n_1 < 0$ 又は $-1 < n_1 < 0$ という条件に対し縦及び横の両方向に対して振動解を与える。即ち、イオンは発散しない。古典的なサイクロトロンはこの条件で運転している。特に、$n_1 = -1/2$ ならば、両方向の振動周期が一致するから、$\Phi = \sqrt{2}\pi$ の偏向角に対して二重収束するスペクトログラフを作る事が可能になる。

1 次の解

境界条件を $\phi = 0$ で $\rho = \rho_1,\ \zeta = \zeta_1,\ \alpha'_r = d\rho/d\phi,\ \alpha'_z = d\zeta/d\phi$ とする解は、

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\alpha'_r}{\kappa_r}\sin\kappa_r\phi + \left(\rho_1 - \frac{\beta}{\kappa_r^2}\right)\cos\kappa_r\phi + \frac{\beta}{\kappa_r^2} \\ \zeta &= \frac{\alpha'_z}{\kappa_z}\sin\kappa_z\phi + \zeta_1\cos\kappa_z\phi\end{aligned}$$

但し、$\kappa_r^2 = 1 + n_1,\ \ \kappa_z^2 = -n_1$ と置いた。

これらの解から 1 次の輸送行列を書き下すのは、単純作業となる。先に提示した $n \neq 0$ という場合の輸送行列では、$n = -n_1$ という習慣を採用している。縦方向には、分散が無いことに、もう一度注意をしておこう。

2 次の解

電場のみの場合と同様の手法で、2 次の運動方程式を解こう。先ず、運動方程式を次の様に書く。

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{d\phi^2} + \kappa_r^2\rho = \ & A_1\sin\kappa_r\phi + A_2\cos\kappa_r\phi + A_3\sin^2\kappa_r\phi + A_4\cos^2\kappa_r\phi + A_5\sin 2\kappa_r\phi \\ & + A_6\sin 2\kappa_z\phi + A_7\cos 2\kappa_z\phi + A_8\end{aligned}$$

展開係数を確認の為に書いておくと、$A = 1 + 3n_1 + 2n_2$ という略号を使用する。

$$A_1 = \kappa_r\left(1 - \frac{A}{\kappa_r^4}\right)\alpha'_r\beta, \qquad A_2 = \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^4}\right)\beta(\kappa_r^2\rho_1 - \beta)$$

$$A_3 = \kappa_r^2\left(\rho_1 - \frac{\beta}{\kappa_r^2}\right)^2 - \frac{A\,\alpha_r^2}{2\,\kappa_r^2}, \qquad A_4 = \alpha_r'^2 - \frac{A}{2}\left(\rho_1 - \frac{\beta}{\kappa_r^2}\right)^2$$

$$A_5 = -\left(\kappa_r + \frac{A}{2\kappa_r}\right)\alpha'_r\left(\rho_1 - \frac{\beta}{\kappa_r'^2}\right), \quad A_6 = \frac{n_2}{\kappa_z}\alpha'_z\zeta_1$$

$$A_7 = \frac{n_2}{2}\left(\zeta_1^2 - \frac{1}{\kappa_z^2}\alpha_z'^2\right)$$

$$A_8 = \beta - \frac{A}{2\kappa_r^4}\beta^2 - \frac{\alpha_r'^2}{2} - \left(1 - \frac{n_2}{\kappa_z^2}\right)\frac{\alpha_z'^2}{2} - \frac{n_2 - \kappa_z^2}{2}\zeta_1^2 - \frac{\kappa_r'^2}{2}\rho_1^2 + \beta\rho_1$$

次に、解を以下の様に展開する。

$$\begin{aligned}\rho = \ & C_1\sin\kappa_r\phi + C_2\cos\kappa_r\phi + (C_3\phi\sin\kappa_r + C_4\phi\cos\kappa_r)\phi + C_5\sin^2\kappa_r\phi + C_6\cos^2\kappa_r\phi \\ & + C_7\sin 2\kappa_r\phi + C_8\sin 2\kappa_z\phi + C_9\cos 2\kappa_z\phi + C_{10}\end{aligned}$$

この表現を運動方程式に代入し、個別の三角関数の係数を比較すると、C_3 から C_{10} の係数が確定し、$C_1,\ C_2$ は、境界条件 $\phi = 0$ で $\rho = \rho_1,\ \alpha'_r = (1 - \rho_1)d\rho/d\phi$ という関係から決定される。

$$
\begin{aligned}
C_1 = &\ \frac{\alpha_r'}{\kappa_r} + \frac{1}{6\kappa_r}\left(3 + \frac{4}{\kappa_r^2} - \frac{A}{\kappa_r^4}\right)\alpha_r'\beta + \frac{1}{3\kappa_r}\left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\alpha_r'\rho_1 + \frac{2n_2}{\kappa_r(5\kappa_z^2-1)}\alpha_z'\zeta_1 \\
C_2 = &\ -\frac{\beta}{\kappa_r^2} + \rho_1 + \frac{1}{6\kappa_r^2}\left(1 + \frac{2A}{\kappa_r^2}\right)\alpha_r'^2 + \frac{2}{3\kappa_r^4}\left(\frac{A}{\kappa_r^2} - 1\right)\beta^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{A}{\kappa_r^2} - 1\right)\rho_1^2 \\
&+ \left\{\frac{1}{2\kappa_r^2} - \frac{2n_2}{\kappa_r^2(5\kappa_z^2-1)}\right\}\alpha_z'^2 + \left\{\frac{n_2}{2(\kappa_z^2-1)} - \frac{n_2-\kappa_z^2}{2\kappa_r^2}\right\}\zeta_1^2 \\
&+ \frac{1}{3\kappa_r^2}\left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\beta\rho_1 \\
C_3 = &\ \frac{1}{2}\left(\kappa_r - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\left(\beta\rho_1 - \frac{\beta^2}{\kappa_r^2}\right) \\
C_4 = &\ \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\kappa_r^4 - 1}\right)\alpha_r'\beta \\
C_5 = &\ \frac{1}{6\kappa_r^2}\left(4 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\alpha_r'^2 + \frac{1}{3\kappa_r^4}\left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\beta^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\rho_1^2 \\
&- \frac{2}{3\kappa_r^2}\left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\beta\rho_1 \\
C_6 = &\ \frac{1}{3\kappa_r^2}\left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\alpha_r'^2 + \left(4 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\left\{\frac{\beta^2}{6\kappa_r^4} + \frac{\rho_1^2}{6} - \frac{\beta\rho_1}{3\kappa_r^2}\right\} \\
C_7 = &\ \frac{1}{6\kappa_r}\left(2 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right)(\alpha_r'\rho_1 - \frac{1}{\kappa_r^2}\alpha_r'\beta) \\
C_8 = &\ \frac{n_2}{\kappa_z(1-5\kappa_z^2)}\alpha_z'\zeta_1 \\
C_9 = &\ \frac{n_2}{2(1-5\kappa_z^2)}\left(\zeta_1^2 - \frac{\alpha_z'^2}{\kappa_z^2}\right) \\
C_{10} = &\ \frac{\beta}{\kappa_r^2} - \frac{\alpha_r'^2}{2\kappa_r^2} - \frac{A}{2\kappa_r^6}\beta^2 + \frac{1}{2\kappa_r^2}\left(\frac{n_2}{\kappa_z^2} - 1\right)\alpha_z'^2 - \frac{\rho_1^2}{2} + \frac{n_2-\kappa_z^2}{2\kappa_r^2}\zeta_1^2 + \frac{\beta\rho_1}{\kappa_r^2}
\end{aligned}
$$

この内、1 次小の量は C_1 の α_r'、 C_2 に含まれる β と ρ_1 及び C_{10} の β だけである。次に磁石の出口での位置と角度を与える式を $\phi = \Phi$ に於いて書き下す。

$$
\rho_2 = \rho(\phi = \Phi),\ \ \alpha_r'' = 1/(1+\rho_2)d\rho/d\phi = (1-\rho_2)d\rho/d\phi|_{\phi=\Phi}
$$

とし、微小量での展開を行なう。

$$
\begin{aligned}
\rho_2 = &\ D_1\alpha_r' + D_2\beta + D_4\rho_1 + D_{11}\alpha_r'^2 + D_{22}\beta^2 + D_{33}\alpha_z^2 + D_{44}\rho_1^2 + D_{55}\zeta_1^2 \\
&+ D_{12}\alpha_r'\beta + D_{14}\alpha_r'\rho_1 + D_{24}\beta\rho_1 + D_{35}\alpha_z'\zeta_1 \\
\\
\alpha_z'' = &\ E_1\alpha_r' + E_2\beta + E_4\rho_1 + E_{11}\alpha_r'^2 + E_{22}\beta^2 + E_{33}\alpha_z'^2 + E_{44}\rho_1^2 + E_{55}\zeta_1^2 \\
&+ E_{12}\alpha_r'\beta + E_{14}\alpha_r'\rho_1 + E_{24}\beta\rho_1 + E_{35}\alpha_z'\zeta_1
\end{aligned}
$$

とおくと、展開係数は次の様に書き下せる。

$$
\begin{aligned}
D_1 = &\quad \frac{1}{\kappa_r}\sin\kappa_r\Phi,\quad D_2=\frac{1}{\kappa_r^2}(1-\cos\kappa_r\Phi),\quad D_4=\cos\kappa_r\Phi\\
D_{11} = &\quad \frac{1}{6\kappa_r^2}\left\{\left(1-\frac{A}{\kappa_r^2}\right)+\left(1+\frac{2A}{\kappa_r^2}\right)\cos\kappa_r\Phi-\left(2+\frac{A}{\kappa_r^2}\right)\cos^2\kappa_r\Phi\right\}\\
D_{22} = &\quad \frac{1}{6\kappa_r^4}\left(2-\frac{5A}{\kappa_r^2}\right)+\frac{2}{3\kappa_r^4}\left(\frac{A}{\kappa_r^2}-1\right)\cos\kappa_r\Phi+\frac{1}{2\kappa_r}\left(\frac{A}{\kappa_r^4}-1\right)\Phi\sin\kappa_r\Phi\\
D_{33} = &\quad \frac{1}{2\kappa_r^2}\left\{\left(\frac{n_2}{\kappa_z^2}-1\right)+\left(1-\frac{4n_2}{5\kappa_z^2-1}\right)\cos\kappa_r\Phi\right\}+\frac{n_2}{2\kappa_z^2(5\kappa_z^2-1)}\cos 2\kappa_z\Phi\\
D_{44} = &\quad -\frac{1}{6}\left\{\left(1+\frac{2A}{\kappa_r^2}\right)-\left(\frac{A}{\kappa_r^2}-1\right)\cos\kappa_r\Phi-\left(2+\frac{A}{\kappa_r^2}\right)\cos^2\kappa_r\Phi\right\}\\
D_{55} = &\quad \frac{n_2-\kappa_z^2}{2\kappa_r^2}(1-\cos\kappa_r\Phi)+\frac{n_2}{2(5\kappa_z^2-1)}(\cos\kappa_r\Phi-\cos 2\kappa_z\Phi)\\
D_{12} = &\quad \frac{1}{6\kappa_r}\left(3+\frac{4}{\kappa_r^2}-\frac{4}{\kappa_r^4}\right)\sin\kappa_r\Phi+\frac{1}{2}\left(\frac{A}{\kappa_r^4}-1\right)\Phi\cos\kappa_r\Phi\\
&\quad -\frac{1}{6\kappa_r^3}\left(2+\frac{A}{\kappa_r^2}\right)\sin 2\kappa_r\Phi\\
D_{14} = &\quad \frac{1}{6\kappa_r}\left\{\left(2-\frac{2A}{\kappa_r^2}\right)\sin\kappa_r\Phi+\left(2+\frac{A}{\kappa_r^2}\right)\sin 2\kappa_r\Phi\right\}\\
D_{24} = &\quad \frac{1}{3\kappa_r^2}\left\{\left(1+\frac{2A}{\kappa_r^2}\right)+\left(1-\frac{A}{\kappa_r^2}\right)\cos\kappa_r\Phi-\left(2+\frac{A}{\kappa_r^2}\right)\cos^2\kappa_r\Phi\right\}\\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\kappa_r-\frac{A}{\kappa_r^3}\right)\Phi\sin\kappa_r\Phi\\
D_{35} = &\quad \frac{n_2}{(5\kappa_z^2-1)}\left\{\frac{2\sin\kappa_r\Phi}{\kappa_r}-\frac{\sin 2\kappa_z\Phi}{\kappa_z}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_1 = &\ \cos\kappa_r\Phi,\ \ E_2 = \frac{1}{\kappa_r}\sin\kappa_r\Phi,\ \ E_4 = -\kappa_r\sin\kappa_r\Phi \\
E_{11} = &\ -\frac{1}{6\kappa_r}\left\{\left(1+\frac{2A}{\kappa_r^2}\right)\sin\kappa_r\Phi - \left(\frac{A}{\kappa_r^2}-1\right)\sin 2\kappa_r\Phi\right\} \\
E_{22} = &\ -\frac{1}{6\kappa_r}\left(3+\frac{2}{\kappa_r^2}+\frac{A}{\kappa_r^4}\right)\sin\kappa_r\Phi + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\kappa_r^4}-1\right)\Phi\cos\kappa_r\Phi + \frac{1}{6\kappa_r^3}\left(1-\frac{A}{\kappa_r^2}\right)\sin 2\kappa_r\Phi \\
E_{33} = &\ \frac{1}{2\kappa_r}\left(\frac{4n_2}{5\kappa_z^2-1}-1\right)\sin\kappa_r\Phi - \frac{n_2}{\kappa_z(5\kappa_z^2-1)}\sin 2\kappa_z\Phi \\
E_{44} = &\ \frac{1}{6}\left(\kappa_r - \frac{A}{\kappa_r}\right)(\sin\kappa_r\Phi + \sin 2\kappa_r\Phi) \\
E_{55} = &\ \frac{1}{2}\left(\frac{n_2-\kappa_z^2}{\kappa_r} - \frac{\kappa_r n_2}{5\kappa_z^2-1}\right)\sin\kappa_r\Phi + \frac{\kappa_z n_2}{5\kappa_z^2-1}\sin 2\kappa_z\Phi \\
E_{12} = &\ \frac{1}{3\kappa_r^2}\left(\frac{A}{\kappa_r^2}-1\right)(\cos\kappa_r\Phi - \cos 2\kappa_r\Phi) + \frac{1}{2}\left(\kappa_r - \frac{A}{\kappa_r^3}\right)\Phi\sin\kappa_r\Phi \\
E_{14} = &\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{A}{\kappa_r^2}\right)(\cos\kappa_r\Phi - \cos 2\kappa_r\Phi) \\
E_{24} = &\ \frac{1}{6\kappa_r}\left\{\left(4+3\kappa_r^2-\frac{A}{\kappa_r^2}\right)\sin\kappa_r\Phi + 2\left(\frac{A}{\kappa_r^2}-1\right)\sin 2\kappa_r\Phi\right\} + \frac{1}{2}\left(\kappa_r^2 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right)\Phi\cos\kappa_r\Phi \\
E_{35} = &\ \frac{2n_2}{5\kappa_z^2-1}(\cos\kappa_r\Phi - \cos 2\kappa_z\Phi)
\end{aligned}
$$

これで、 2 次の直角入出射の議論はおしまい。

次には、斜め入・出射の話が来る。参考文献としては、R,M, Helm 著の SLAC report がある。かなり入力に飽きてきたので、結果だけを書くことにしよう。

入射側だけを書くが、出射側でも同じ作業をすれば良い。

1　ρ_1 は以下で定義される $\bar{\rho}_1$ とする。

$$\bar{\rho}_1 = \rho_1 + \alpha_r'\rho_1\tan\epsilon' + \frac{1}{2}\rho_1^2\tan^2\epsilon'$$

2　入射角 α_r' は幾らか傾きが増える

$$\bar{\alpha_r'} = \alpha_r' + \Delta\Phi'$$

$$\Delta\Phi' = (\rho_1 - \rho_1^2)\tan\epsilon' + \alpha_r'\rho_1\tan^2\epsilon'$$

3　偏向角 Φ は上で定義した $\Delta\Phi'$ だけ減る。

$$\bar{\Phi} = \Phi - \Delta\Phi'$$

最後に、数値計算に関する注意

ここでは、 2 次迄の展開を行なった。 3 次迄の計算が松尾により行なわれていて、TRIO という名前の FORTRAN の副プログラム群として、公開されているはずである。但し、何処にあるかは知らない。個人的には、松尾武清 私信 博士論文 という事になる。

荷電粒子の磁場中での軌跡の追跡

磁場分布が与えられた時、軌跡を追跡する手法を二つ紹介する。一つは、中心軌道を与え (まじめに計算し)、その中心軌道に対する近軸光線を追跡する、計算機を利用する方法である。もう一つは、floating wire method と呼ばれる、実験的な手法である。

基準となるイオンの運動方程式

運動量が $\mathbf{P}_0$、時刻 t での位置 $\mathbf{r}_0$、その質量と電荷を $m,\ q$ と書くと、

$$\frac{d\mathbf{P}_0}{dt} = \frac{q}{m}\,\mathbf{P}_0 \times \mathbf{B}_0, \quad \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \frac{1}{m}\,\mathbf{P}_0$$

この微分方程式は、磁場分布を与えた時には、解けるとする。例えば、Runge-Kutta 法の様な手法を利用する。Runge-Kutta 型の解法には、精度保証をする様なものも、利用する事は可能である。高精度の計算をしたければ、当然高精度の磁場分布の知識が必要であるが、Shanks の公式や Fehlberg の公式を使用すればよい。

ベクトルを成分で次の様に書こう。

$$\mathbf{P}_0 = (P_{0x},\, P_{0y},\, P_{0z}),\ \mathbf{r}_0 = (r_{0x},\, r_{0y},\, r_{0z}),\ \mathbf{B}_0 = (B_{0x},\, B_{0y},\, B_{0z})$$

イオンの運動がある面内に限られ、この面を x-z 面だとする。

$$\mathbf{P}_0 = (P_{0x}, 0,\, P_{0z}),\ \mathbf{r}_0 = (r_{0x}, 0,\, r_{0z})$$

即ち、$y_0 = dy_0/dt = 0$ が常に成立する。

独立変数を、時刻 t から軌道長 s_0 に変更する。

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\,s_0}{dt}\,\frac{d}{d\,s_0} = \frac{P_0}{m}\,\frac{d}{d\,s_0}$$

但し、中心軌道上のイオンの出発点で、$s_0 = 0$ とする。x-z 面での軌道の曲率 k を導入する。

$$k = -\frac{q}{P_0}\,B_{0y}$$

ここで、負号は $q > 0$ で B_{0y} が y 軸方向を向いている時、軌道が原点から逃げる様に曲がる事に対応する。

仮定により、 6 次元の運動方程式を 4 次元の方程式に出来た。

$$\frac{d}{ds_0}\begin{pmatrix} P_{0x} \\ P_{0z} \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} P_{0z} \\ -P_{0x} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{ds_0}\begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{P_0}\begin{pmatrix} P_{0x} \\ P_{0z} \end{pmatrix}$$

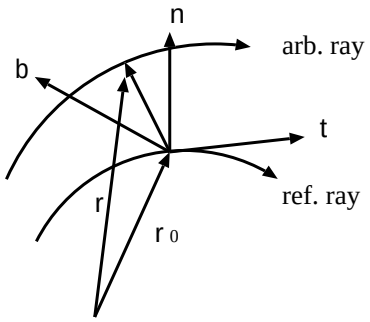
イオンが x-z 面にあるという付帯条件は

$$P_{0x}\,B_{0z} - P_{0z}\,B_{0x} = 0$$

これで、中心軌道の運動は、解けたとする。

近軸光線の運動方程式

近軸光線の物理量には下付の 0 を付けない。局所座標を以下の様に導入する。



図で、ref. ray と書いたのが中心軌道であり、原点から $\mathbf{r}_0$ の位置を通る。arb. ray と書いたのが、近軸光線であり、原点から $\mathbf{r}$ の点を通る。局所座標系は、点 $\mathbf{r}_0$ での中心座標における 接線、主法線、陪法線の方向に座標軸をとり、その単位ベクトルを、図のように $\mathbf{t}$、$\mathbf{n}$、$\mathbf{b}$ で表す。

$$\mathbf{B} = B_1\mathbf{n} + B_2\mathbf{b} + B_3\mathbf{t},\ \ \mathbf{P} = P_1\mathbf{n} + P_2\mathbf{b} + P_3\mathbf{t} = P_0\,\delta\mathbf{P},\ \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0\xi\mathbf{n} + \eta\mathbf{b} + \zeta\mathbf{t} = \mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$$

ここで、$\delta\mathbf{P}$ は無次元で大きさが 1 程度のベクトルであり、$\delta\mathbf{r}$ は、 1 次の微小量のベクトルである。

独立変数を s_0 と先にとったが、それぞれのイオンは独自の軌道長 s を持っているので、次式が成立する。

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{ds_0}{ds}\frac{d}{ds_0} = \frac{P}{m}\frac{ds_0}{ds}\frac{d}{ds_0} = \frac{1}{m\,\alpha}\frac{d}{ds_0}$$

但し、α は次式で定義される。

$$\frac{1}{\alpha} = P\,\frac{d\,s_0}{ds}$$

次に Frenet-Seret の公式を思いだしておこう。

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n},\quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b},\quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n}$$

現段階での任意軌道にイオンの軌跡は次の微分方程式で与えられる。

$$\frac{d}{ds_0}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \alpha\,q\begin{pmatrix} P_2\,B_3 - P_3\,B_2 \\ P_3\,B_1 - P_1\,B_3 \\ P_1\,B_2 - P_2\,B_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau\,P_2 - k\,P_3 \\ -\tau\,P_1 \\ k\,P_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{d\,s_0}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau\eta - k\zeta \\ \tau\xi \\ k\xi - 1 \end{pmatrix}$$

この速度を与える式の最後の 1 は $\mathbf{r}_0$ を s_0 で微分すると、接線ベクトルになるから、登場している。

次に方程式を制限しよう。

先ず、ds_0/ds に付いて。

この値は、s_0 と s にどのような対応関係をつけるか決めないと計算出来ない。そこで、次の様に決める。即ち、$\mathbf{r}_0$ を決める時、$\mathbf{r}$ は $(\mathbf{n},\ \mathbf{b})$ 面と近軸光線の交点に選ぶ。こうすると、$\delta\mathbf{r}$ はいつも $(\mathbf{n},\ \mathbf{b})$ 面内にあるから、

$$\zeta = \frac{d\zeta}{ds_0} = 0$$

運動方程式に代入すると、

$$\alpha\, P_3 + k\xi - 1 = 0, \ \text{又は}, \quad \alpha = \frac{1 - k\xi}{P_3}$$

もう一つの制限を設ける。軌道がいつも (x-z) 面内にあるならば、$\tau = 0$ であり、軌道は捩じれてはいない。この近似の下では、運動方程式は

$$\frac{d}{ds_0}\begin{pmatrix} \delta\, P_1 \\ \delta\, P_2 \end{pmatrix} = \frac{q}{P_0\, \omega}\begin{pmatrix} \delta P_2\, B_3 - \delta P_3\, B_2 \\ \delta P_3\, B_1 - \delta P_1\, B_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k\, \delta\, P_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta P_3 = \{\delta P^2 - \delta P_1^2 - \delta P_2^2\}^{1/2}$$

$$\frac{d}{d\, s_0}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} \delta P_1 \\ \delta P_2 \end{pmatrix}$$

ここで、

$$\frac{1}{\omega} = \alpha\, P_0$$

と置いた。当然の事であるが、δP_3 に対する式は、エネルギー保存の式から、導ける。

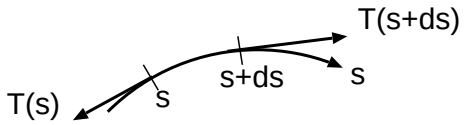
この微分方程式を解くのは、簡単であるとする。困難を感じる人はあるかも知れないが。。。

この微分方程式は、軌道長が露に登場しているので、飛行時間の計算が行えるという長所を持つ。輸送行列を利用する方法では、不可能であった事を思いだそう。(trim draw というプログラムを書いている人もあるようだ。)

磁場分布が十分な精度で測定できていると、高分解能という概念を用いなくとも、原理的には、始点と終点が分かっていると、その軌道や運動量が個別に計算できるから、非常に立体角の大きな磁気分析器を設計することができる。

floating wire 法

磁場がその面に垂直にかかっている様な面での、イオンの運動を考える。



図のように、この面内に非常に軽くて軟らかい電線をおき、電流 I を流す。電線には、張力 T をかけて、両端から引っ張っておく。この電線が平衡状態にあると仮定し、力の釣合を調べる。適当に原点をとり、そこから針金に沿っての長さが、$s,\ s + ds$ できまる微小部分に注目する。張力に起因する力、$\mathbf{F}_T$ は、

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{T}(s) - \mathbf{T}(s + ds) = -\frac{d\mathbf{T}}{ds}\, ds$$

$\mathbf{T}$ は、針金の接線の方向を向いているから、$\mathbf{T}$=T $\mathbf{t}$ ($\mathbf{t}$ は接線ベクトル)。主法線ベクトル $\mathbf{n}$ と接線ベクトル $\mathbf{n}$ には次の関係がある。

$$\frac{d\,\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{n}/\rho$$

但し、ρ は曲率半径である。故に、

$$\mathbf{F}_T = -\frac{T}{\rho}\, ds\, \mathbf{n}$$

次に、磁場に起因する力 $\mathbf{F}_B$ を、計算する。

$$\mathbf{F}_B = I\, d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$$

仮定より、磁場はこの面に垂直にかかっているから、陪法線ベクトルを $\mathbf{b}$ とすると、$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ であり、$\mathbf{B}$=B $\mathbf{b}$、$d\mathbf{s} = ds\mathbf{t}$ と書けるから、

$$\mathbf{F}_B = I\, B\, ds\, (\mathbf{t} \times \mathbf{b}) = I\, B\, ds\, \mathbf{n}$$

$\mathbf{F}_B,\ \mathbf{F}_T$ はどちらも法線成分だけを有するから、うまく両者が吊合うと、

$$\rho = \frac{T}{I\, B}$$

ここで、電流 I と張力 T は s に依存せず一定であるから、点 s での磁場 $B(s)$ が与えられると、針金の曲率は、この式で与えられる。一方、運動量 P、電荷 q のイオンの、曲率半径が ρ とすると、

$$P = q\, B\, \rho$$

という関係がある。従って、

$$\frac{P}{q} = \frac{T}{I}$$

という関係があるならば、イオンの軌跡と針金の形は同一となる。

非常に細くて、軟らかい銅線の入手は困難かもしれない。CERN 関係かな？ スイスのメーカーで入手可能だと思う。日本の極細銅線メーカーにも聴いて御覧なさい。

磁場中でのスピンの振舞いと **AVF** サイクロトロンでの減偏極

出発点：スピン I を持つ粒子の磁気能率 $\vec{\mu}$ は次式で与えられる。

$$\vec{\mu} = \gamma\, \mathbf{I}$$

ここで、γ は gyromagnetic ratio と呼ばれる。この式が理解出来ない人は、角運動量の理論 (特に Wigner-Eckart の定理) を復習するのが良いだろう。磁場 $\mathbf{B}$ 中でのスピンの運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \vec{\mu} \times \mathbf{B}, \quad \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma\, \vec{\mu} \times \mathbf{B}$$

$\mu = |\vec{\mu}|$ を一定とし、$\mathbf{B}$ が与えられた時、この方程式を解けば良い。この式は、$\vec{\mu}$ の時間的な変化の割合が $\vec{\mu}$ 及び、$\mathbf{B}$ に、直交していると言っている。

もしも、$\mathbf{B}$ が時間的に変化しなければ、$\vec{\mu}$ の $\mathbf{B}$ に平行な成分は、時間的に変化しない。

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mu} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \mathbf{B} \cdot (\vec{\mu} \times \mathbf{B}) = 0$$

μ は一定であり、かつ $\mathbf{B}$ に平行な成分も一定である事が導けたから、直角成分の大きさも一定であり、その向きだけが時間的に変化する事がこれで分かった。

一様磁場の下では歳差運動をする。この導き方は色々あるが、角速度 $\vec{\omega}$ で回転する、回転系で運動方程式を眺めてみよう。この時、次の関係式が成立する。

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt}\Big)_{\omega} = \frac{d\vec{\mu}}{dt} - \vec{\omega}\times\vec{\mu} = \gamma\,\vec{\mu}\times\mathbf{B} - \vec{\omega}\times\vec{\mu} = \gamma\vec{\mu}\times(\mathbf{B}+\vec{\omega}/\gamma)$$

見掛け上、磁場が $\mathbf{B}$ から、 $\mathbf{B}_{eff} = \mathbf{B} + \vec{\omega}/\gamma$ と変化したように見える。ここで、$\vec{\omega} = -\gamma\,\mathbf{B}$ と選ぶと、回転系では $d\vec{\mu}/dt)_{\omega} = 0$ だから、磁気能率は静止している。即ち、実験室系では磁気能率は $-\gamma\,\mathbf{B}$ なる角速度で回転している。$\mathbf{B}$ を z 軸にとると、$\gamma > 0$ の時、時計方向に回転している。

磁気能率の回転角度は、磁場中に滞在する時間と、磁場の強さの積に比例する。一方、荷電粒子の偏向角も同じ積に比例するので、イオンの磁場による偏向角と磁気能率の回転角はいつも比例関係にある。

特に、陽子は磁気能率が先行して良くまわるが、重陽子はほとんど同じ回り方をする。

イオンの進行方向を変えずに、磁気能率の向きを変化させる目的で Wien の速度 フィルターを使用する場合がある。勿論、静電場を用いると、磁気能率の向きを変えずに、イオンの進行方向を変えられる。

スピンは保持場をかけておくと、その磁場の方向を回転軸とするラーマーの歳差運動をしている。シンクロトロンやサイクロトロンに偏極イオンを入射すると、この加速器の主磁場が保持場となり、偏極を保存出来る。ところが実用的には、偏極が全然保存しない場合が、経験された。以下に、何故円形加速器で偏極が保存されない場合があるかを説明しておこう。

先ず、NMR(核磁気共鳴) の原理から、復習しよう。主磁場 B_0 に直角に副磁場 B_1 があり、B_0 は時間的に変動しないが、B_1 はその強度が正弦的に変化しているとしよう。ある直線上で、正弦的に変化する物理量は、次式により、二つの逆方向に回転する量の重ね合わせで表現出来る。

$$2\,\cos\omega_1\,t\mathbf{e}_x = (\cos\,\omega_1\,t\mathbf{e}_x + \sin\omega_1\,t\mathbf{e}_y) + (\cos\,\omega_1\,t\mathbf{e}_x - \sin\omega_1\,t\mathbf{e}_y)$$

$\mathbf{B}_0$ の方向を回転軸とし、角速度 ω_0 で回転する系からこの状況を見ると、

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt}\Big)_{\omega_0} = \gamma\vec{\mu}\times(\mathbf{B}_0 + \vec{\omega}/\gamma + \mathbf{B}_1)$$

従って、$\vec{\omega}_0 = -\gamma\mathbf{B}_0$ という回転系では、スピンは $\mathbf{B}_1$ のみを見る。ここで、もしも $\omega_1 = \omega_0$ と選ぶと、$\mathbf{B}_1$ は、回転系では固定場と、角速度が $2\omega_1$ で回転する磁場の重ね合わせとなる。高速 $(2\,\omega_1)$ で回転する磁場の効果は無視すると、磁気能率はこの固定場を回転軸としてゆっくりと $(|B_1| << |B_0|$ を仮定する) ラーマーの歳差運動をする。この歳差運動の半周期後には、磁気能率の向きは反転した事になる。

即ち磁気能率が反転する時の角速度は、$\gamma\,B_1/\sqrt{2}$ である。

実際の磁気共鳴装置では、反転する時には rf 磁場 B_1 からエネルギーを貰うが、元に戻る時には、環境との相互作用によりエネルギーを外部に放出させる。これにより、磁気能率はいつも rf 場からエネルギーを貰うように工夫する。

AVF サイクロトロンやシンクロトロンの主磁場 B_0 に直交した磁場成分を $\mathbf{B}_1$ だと考えて、これを Fourier 変換して考える。この Fourier 成分の内、角速度が $\omega_0 = -\gamma\,B_0$ である部分が存在すると、磁気能率は上に挙げた角速度 $\gamma\,B_1/\sqrt{2}$ で回転を開始する。この様な Fourier 成分の場の中を $t = \sqrt{(}2)\pi/(\gamma B_1)$ だけ走ると、磁気能率の向きは、反転する。走行時間が、

上に書いた時間よりも充分短ければ、減偏極は無視できる。円形加速器では、イオンが円運動している効果も考えに入れなければいけない。

磁場・電場分布

ラプラスの方程式を計算機を用いて解く事を主な目的とする。 2 次元の場合と 3 次元の場合を取り上げるが、 2 次元模型の結果として参考にされるのは、Rogowski 曲線であろう。これは詳しく取り上げる。数値計算に関しては、現在では、有用な有限要素法のプログラムが市販されているので、概観するだけに留める。

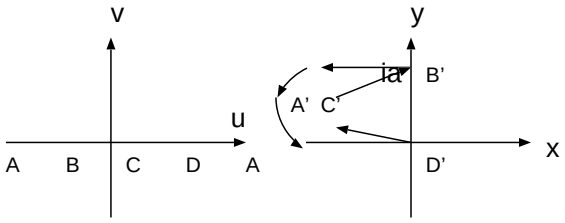
実際的な方法としては、電解槽法があるが、これも良く知られているだろうから、取り上げない。

2 次元の問題

複素正則関数の実部と虚部は単独に、 2 次元のラプラス方程式を満足する事は既知であるとする。実用的な文献として、Morse and Feshbach 著 Methods of Theoretical Physics, vol 2, Chap. 10.2 を挙げておこう。

Schwartz-Christoffel の変換を利用する例を二つ、引用しておこう。

1) 2 次元のコンデンサーの問題。w 平面上の点 A、B、C、D を z 平面上の点 A', B', C', D' に移す変換を取り上げる。



	z	w	偏角
A	$-\infty + i?$	$-\infty$	π
B	$0 + ia$	-1	$-\pi$
C	$-\infty + i??$	0	$+\pi$
D	0	1	$-\pi$

この対応に対する微分方程式は、

$$\frac{dz}{dw} = A\,\frac{w^2-1}{w}$$

積分すると、

$$z = z_0 + z_1\left(\frac{w^2}{2} - \ln w\right)$$

上の対応関係から、定数は $z_1 = -a/\pi,\ z_0 = a/2\pi$ ときまる。w 平面上の原点に立てた針金がつくるポテンシャルを $\psi = \ln w$ とすると、z と ψ の関係は

$$z = \frac{a}{2\pi}\{2\psi + 1 - \exp 2\psi\}$$

適当に記号を入れ換え、定数項を除くと、

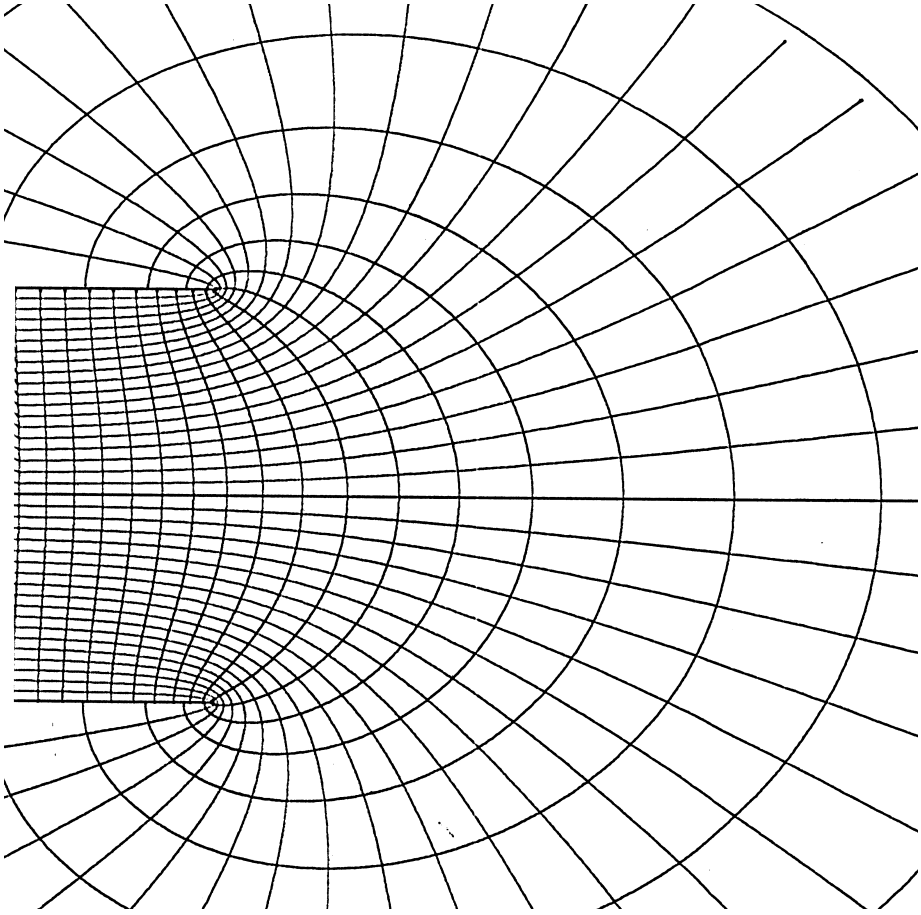
$$\psi = z + \exp z$$

という式も、コンデンサーのポテンシャルを与える式として、見掛ける。

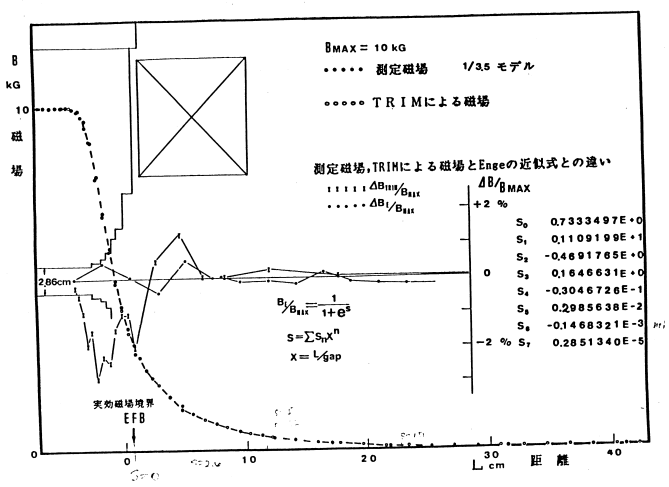
どちらの式でも良いが、この等ポテンシャル面上の電場の強さを計算する事が出来る。z 平面上で、B'C' 面と C'D' 面で囲まれた領域がコンデンサの内部である。即ち、w 平面上で C から上半平面に放射状に出る電気力線が z 平面上の等ポテンシャル面に対応する。この等ポテンシャル面上での電場 (磁場) の強さを計算する事が出来る。

w 平面の原点から、４５度及び１３５度の方向に出る電気力線に対応する等ポテンシャル面上では、端縁部での飽和が無い。従って、この面に沿って電極 (磁極) を加工すると良い。この曲線を Rogowski curve と呼ぶ。大きな電磁石では、この曲線をなぞる様に磁極を加工する事が行われる。この様に加工しておくと、飽和の効果が最も起こりにくいので、規格化した磁場分布は、平均磁場を変えても、変化しにくい。ある場合には、磁場の有効領域を増やす方が優先される。この様な場合には磁極の端縁部を幾らか膨らませておく。この様な膨らみは、サイクロトロンでのイオン収束の考察をした M.E. Rose に因んで、Rose shim と呼ばれる。

ここで紹介した計算での、端縁部の電位 (磁位) 分布の様子をグラフに示す。



さらに、大阪大学での リングサイクロトロン開発にあたり、測定された磁極付近での磁場分布の様子も参考の為に、引用しておこう。



図で、正方形の中に× 印が記入された部分がコイルであり、ここに電流が流される。階段状の部分を持つのが磁極であり、近似的な Rogowski 曲線となっている。

TRIM というプログラムで計算された磁場分布と、実測値との比較がなされている。磁場分布は、Enge の近似と呼ばれる方法でも記述されている。参考までに、数値を記録しなおしておこう。

$$B(x)/B_{max} = 1/\{1 + \exp\,(\sum_n s_n\, x^n)\}$$

ここで、$x = L/$(磁極間隙) であり、L は磁極から、外へ向かう距離である。展開係数 s_n は次の様になっている。

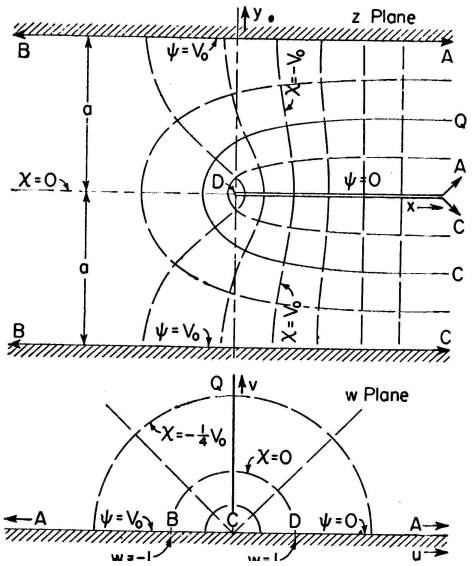
n	0	1	2	3
	0.7333497	1.109199	-0.4691765	0.1646631
n	4	5	6	7
	-3.046726E-2	2.985638E-03	-1.468321E-4	2.851340E-6

参考文献では、数値に一部欠落があったが、これは補っておいた。

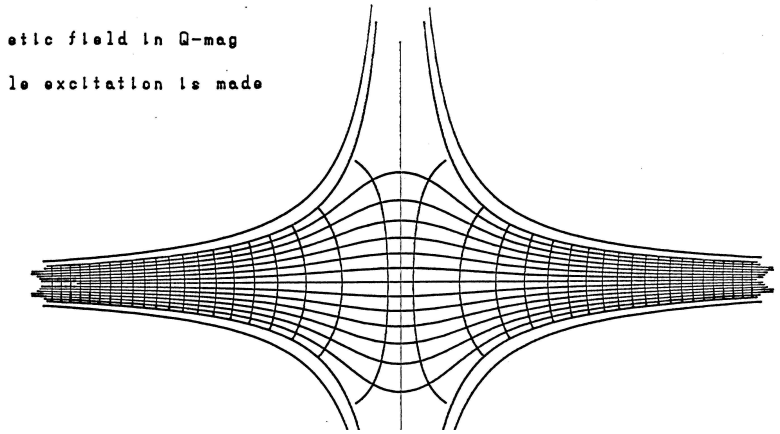
Morse and Feshbach の教科書 pp1247 には、バリコンの電場も計算が詳しく与えてある。以下の変換を利用すれば良い。

$$z = \frac{a}{\pi} \ln \left\{ \frac{w}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\,w} \right\}$$

参考までに、図を引用しておこう。



この計算の応用例を以下に与えておこう。図の ADC の部分の偏角は３６０度である。この変換の平方根で定義される変換をつくると、AD 部分の偏角はいずれにせよ 0 度である。一方、DC 部分の偏角は３６０度から１８０度に変換される。従って、上の図の全平面が、新しい平面では、上半面に移る。その結果、AB と BC に対応する電極は、直角双曲線となる。新しく作られた、二つの直角双曲線を、下半面に鏡像の形で作ると、全体としては、磁気的 Q lens と同じ配置となる。結局新しく作られた図は、磁気的 Q lens と同じであるが、電位の掛け方が、上の二つの電極では正、下の二つの電極では負という具合になる。



この図 (解) を９０度ずつ回転し、適当に重ね合わせると、Q lens の磁極を独立に、任意の強さで励磁した時の磁場分布を計算する事が可能である。

多分、運動学に起因した焦点位置の補正に使用できるのではないかと思っている。

もう一つの用途は、ラプラス方程式を数値的に解くプログラムのテストデータとして使用する事である。

ラプラスの方程式を解く

以下に与えたラプラスの方程式の解は、

$$\nabla^2 u(x,\, y,\, z) = 0$$

以下の性質を持つ。

$$u(x,\,y,\,z)=\frac{1}{3}\{\quad\{u(x+h,\,y,\,z)+u(x-h,\,y,\,z)\}/2 \\ +\quad\{u(x,\,y+h,\,z)+u(x,\,y-h,\,z)\}/2 \\ +\quad\{u(x,\,y,\,z+h)+u(x,\,y,\,z-h)\}/2\quad\}+O(h^4)$$

右辺の 3 個の項は、それぞれ x、y、z 方向の平均値であり、その和をもう一度 3 で割って平均している。端的に言えば、ラプラスの方程式の解 (調和関数) の値は、周囲の値の平均値という事である。この式は、調和という事の意味を非常に良く示している。

2 次元では、Cauchy の積分表示を思い出そう。

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\,i}\oint\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

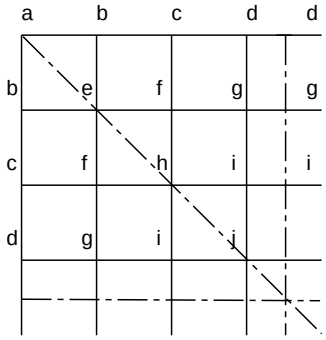
ここで、$\zeta=z+r\,e^{i\theta}$ と、変数変換してみると、

$$f(z)=\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi}f(z+r\,e^{i\theta})\,d\theta$$

となり、上で述べた様に、正則関数の値は、周囲の値の平均値である事が分かる。これが Cauchy 積分の本質であり、正則関数の著しい性質である。関数論の定理に、" 定数でない正則関数の絶対値は定義域の内部では極値を取らない" という、最大値・最小値の定理というのがあった。上に述べた、真中の値は周囲の値の平均値という性質を知っていると、自明な定理である。

この様に厳しい制限があるために、一致の定理の様に集積点を有する $\aleph_0$ 個の点での値が一致する二つの正則関数は、定義域全体で一致するという、一致の定理も成り立つ。関数の濃度という概念を知っている人には、！！

この性質を用いたラプラス方程式の数値解法の例を、以下の図を見ながら、2 次元で示そう。



正方形の接地された導体の中心に 1 ボルトの円筒を置く。この時の円筒と導体で囲まれた領域の電位分布を計算したいとする。導体の各辺上に 8 個の点をとり、長さを 7 等分する。実際には、ずっと多くの点を取れば良いが簡単と具体化の妥協で 7 や 8 という数字が登場した。図の 3 本の 1 点鎖線の交点が中心だとする。4 回対称だから、全体の 1 / 8 だけを取り上げて考えれば良い。実線の交点での電位を図の様に a,b,c$\cdots$ j と書く。問題より、$a=b=c=d=0,\;\;j=1$ とし、以下の等式が成立する事を要求する。

$$e=(b+f+b+f)/4,\;\;f=(c+h+e+g)/4,\;\;g=(d+i+f+g)/4$$

$$h=(f+i+f+i)/4,\;\;i=(g+j+h+i)/4$$

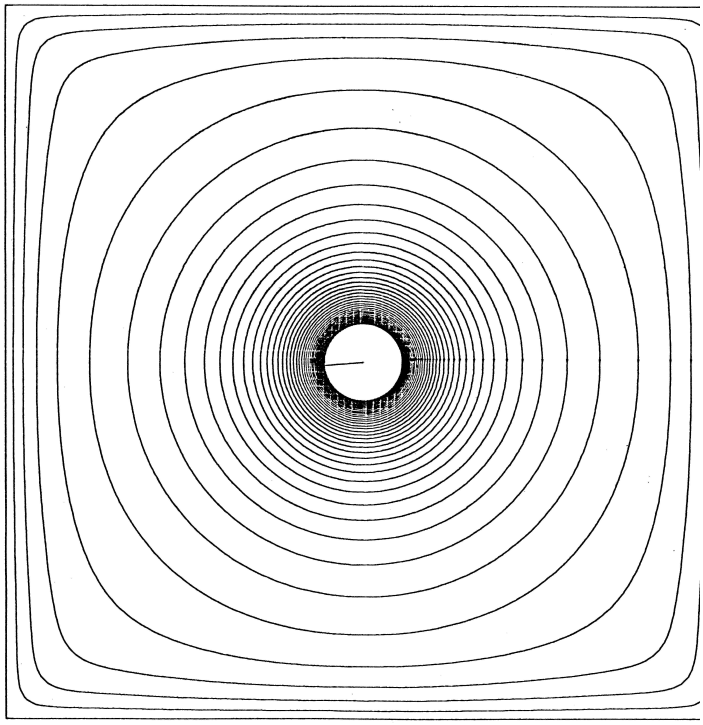
5 個の変数 $e,\ f,\ g,\ h,\ i$ に対して、上に定めた境界条件の定数及びその他の変数に対する推定された初期値として、収束するまで、この代入を根気良く繰り返す。(今の場合だと、連立方程式を解く方が早いが、式が無数にある時には、頭から解くのは大変だろう。) 今ならば、多くの計算機メモリーが利用できるから、ある種の共役勾配法を利用するだろう。収束したら、円筒上で 1 ボルトとなるように解を規格化する。

実際には、収束を加速するために、以下の様に, 変数 λ を導入して式を変形する。格子点 $(i,\ j)$ での電位を $u(i,\ j)$ と記す。

$$u^{new}(i,j) = u^{old}(i,j) + \lambda \left[\{u(i+1,j) + u(i-1,j) + u(i,j+1) + u(i,j-1)\}/4 - u^{old}(i,j) \right]$$

この式では、古い値を新しい値で置き換える、古い値に対する補正項といった概念が分かりやすいように、old, new という上付き文字を付けたが、実際の計算では、右辺には古い値と、修正後の新しい値が混在していても収束する事が分かっている。この手法は逐次過剰緩和 (Successive Over relaxation , SOR) と呼ばれる。λ は 1 よりも少し大きな値をとる。但し、λ が大きすぎると発散する。

以下にこの手法で解いた例を図示する。これは、この世に PC と XY plotter が普及しだしたころに、解いた例である。多分一つの辺に 5 0 点ほど、取ったと記憶している。



中心点は、発散するから避けているのが分かるだろう。格子点での値を計算し、等ポテンシャル点をスプライン関数で滑らかに繋いでいる。余裕があれば、格子点における potential の値から、連続した等 potential 線を描くアルゴリズムを考えてみよ。

グリーン関数を用いる方法 (境界要素法)

$\nabla^2\phi = 0$ のグリーン関数を $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ とする。即ち、$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ = $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ を満足する関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を一つ持って来る。当然、∇ は $\mathbf{r}$ に関する微分を表し、$\mathbf{r}$' は定ベクトルである。

Poisson の方程式 $\nabla^2\psi = \rho$ を想定し、グリーンの定理を ψ と G に適用すると、

$$\int (\psi \nabla^2 G - G\nabla^2\psi) dv = \int (\psi \nabla G - G\nabla\psi) \cdot d\mathbf{S}$$

から、

$$\psi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d\,v' + \int (\psi(\mathbf{r}')\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}') - G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla\psi(\mathbf{r}'))\cdot d\mathbf{S}'$$

という式が登場するのは、良く知られている。右辺、第 1 項は電荷密度が与えられた時の、クーロンポテンシャルであり、第 2 項の面積分が、境界条件を与える。面電荷密度と、面双極子密度に関係している事も、覚えているだろう。

グリーン関数が、 2 次元では対数ポテンシャルに比例し、$-\dfrac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$、三次元の問題では通常のクーロンポテンシャル、$-\dfrac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$、である事も、電磁気学の教科書に書かれている。因みに、これらのグリーン関数の前に現れる、π に関係した因子は 2 、 3 次元での全空間を張る角度である。δ 関数を使わずに、グリーンの定理を証明した世代には、自明の事である。

さて、電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ が与えられたならば、第 1 項の体積分は実行可能である。第 2 項の面積分は、境界上でのポテンシャルの値と境界に垂直な電場成分が与えられたならば、実行可能である。但し、境界上で、ポテンシャルの値と、その電場の法線成分を同時に与えると、条件が厳しすぎて、問題が解けるとは限らない。境界上で、ψ 又は、$\nabla\psi$ の法線成分のどちらかが与えられている場合には、問題は解ける。

問題を離散化する事を次に考えよう。
境界面を M 個の小曲面 $S_j,\ (j=1,\cdots,M)$ に分割し、各小曲面では ψ のみ、又は電場の法線成分 $d\psi/dn$ のみが与えられていると仮定しよう。次に、小曲面上に n_j 個の点をとり、この点での ψ と $d\psi/dn$ の値を $\psi_{i,j}$、$\psi'_{i,j}\ (n_j=1,2,\cdots,n_j)$ と書く。

数値積分の公式は、各点での関数値に、ある荷重 w を掛けて加える事で数値積分が実行できると教えている。従って、

$$\int \psi(\mathbf{r}')\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{S}'_j \simeq \sum_i w_i\,\psi_{i,j}\,G'(i,j;\mathbf{r})$$

$$\int G'(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla\psi(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{S}'_j \simeq \sum_i w_i\,\psi'_{i,j}\,G(i,j;\mathbf{r})$$

と書ける。ここで、$G(i,j;\mathbf{r}),\ G'(i,j;\mathbf{r})$ は計算可能であり、$\psi_{i,j},\ \psi'_{i,j}$ のどちらかは未知数であり、他方は与えられている。ポテンシャルを計算すべき点、$\mathbf{r}$ を、境界表面上のどれかの点 (ℓ,m) ととると、

$$\int \psi(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,dv' = \frac{\Omega_{\ell,m}}{4\,\pi}\psi_{\ell,m}$$

という式が成立する。ここで、$\Omega_{\ell,m}$ は、領域内の点 (ℓ,m) の近くから、点 (ℓ,m) を見込む ”立体角” である。従って、次の等式が近似的に (積分公式の誤差範囲で) 成立する。

$$\frac{\Omega_{\ell,m}}{4\pi}\,\psi_{\ell,m} = \rho_{\ell,m} + \sum_{i,j} w_i\{\psi_{i,j}\,G'(i,j;\ell,m) - \psi'_{i,j}\,G(i,j;\ell,m)\}$$

ただし、

$$\rho_{\ell,m} = \int G(\mathbf{r}_{\ell,m},\mathbf{r}')\,\rho(\mathbf{r}')dv'$$

$$G(i,j;\ell,m) = G(i,j;\mathbf{r}_{\ell,m})$$

等。簡単の為に、(i,j) の足をまとめて、J と書き、$\mathbf{f}_J = \psi_{i,j}$、$\mathbf{f}'_J = (\Omega_J/4\,\pi)\,\psi_{i,j}$ 及び $\mathbf{g}_J = \psi'_{i,j}$ というベクトル記号を導入すると、

$$G'\,\mathbf{f} + G\,\mathbf{g} + \vec{\rho} = \mathbf{f}'$$

という線形の連立方程式にまとめられる。この連立方程式は、解く事が可能である。

一度、境界上の各点でのポテンシャルとその法線成分が解けると、境界内部でのポテンシャルは、元のグリーン関数を用いた式に戻ると、計算可能である事が分かる。

この境界要素法では、

0) 先ず境界を要素に細分し、

1) 各要素点でのポテンシャルと法線成分の値が満足すべき連立方程式を作る。

2) この連立方程式を解き、境界上での値を全て計算する。

3) 境界上での値が分かると、ポテンシャルを計算したい、内部点でのポテンシャルを、電荷密度の積分と、境界上での面積分として書き下し、その積分を実行する。

ポテンシャルを計算したい点の数だけ、この 3) のプロセスを繰り返す。

対数や 1 /r を含む積分をやたらと実行しなければいけない。

非常に面倒だから、数値例は与えない。加速器センターのミニコンと呼ばれる計算機があった頃に、この手法で問題を解くと、1 時間の内、5 5 分は swapping に費されていた！

有限要素法

指導原理としては、Ritz 法と Galerkin 法がある。

Ritz 法

Ritz 法 では、$\nabla^2 u + f = 0$ という Poisson 方程式が与えられたとして、次の汎関数 $I(v)$ を定義する。

$$I(v) \equiv \int \{(\nabla v)^2 - 2\,v\,f\}$$

面倒だから、積分記号は書いたが、積分変数等は全て省略している。$u,\ v,\ f$ 等はすべて $\mathbf{r}$ の関数である。$I(v)$ は、v が、上で与えた Poisson 方程式の解になった時に、最小値をとる。

簡単に確認しておこう。$v \to v + \epsilon w$ と、v を無限小定数 ϵ と、ある関数 w とを用いて変化させてみる。但し、w は積分の端点では 0 とする。

$$\delta I(v) = 2\epsilon \int \{\nabla v \cdot \nabla w - f\,w\} + O(\epsilon^2)$$

と変形できるが、部分積分を実行し、$O(\epsilon^2)$ を無視すると、

$$\delta I(v) = -2\epsilon \int w\{\nabla^2 v + f\} = 0$$

この式が、任意の w に対して成立するのは、v が与えられた Poisson 方程式の解である場合である。

基底 $\{\phi_i\}$ を導入し、u をこの基底で展開する。こうして出来た近似解を $\hat{u}$ と書く。

$$\hat{u} = \sum_i a_i\,\phi_i$$

この展開式を、汎関数に代入すると、

$$I(\hat{u}) = \sum_{i,j} a_i\,a_j \int \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j - 2\sum_i a_i \int f\,\phi_i$$

展開係数を決定する為に、

$$\frac{\partial I(\hat{u})}{\partial a_i} = 0$$

を要求すると、

$$J\,\mathbf{a} = \mathbf{k}$$

但し、

$$(J)_{i,j} = \int \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j, \quad k_i = \int f\,\phi_i$$

で定義される。この連立一次方程式は、基底さえ定義されれば、解ける。

Galerkin 法

$\nabla^2 u + f = 0$ が成立するならば、u の定義域で定義された、任意の積分可能な関数 g に対して、次の関係式が成立する。

$$g(\nabla^2 u + f) = 0, \quad \int g(\nabla^2 u + f) = 0$$

u の境界条件を満足する基底を $\{\phi_i\}$、g を展開する基底を $\{\psi_i\}$ とする。

$$\hat{u} = \sum a_i\,\phi_i$$

と書くと、

$$0 = \int \psi_j\{\sum_i a_i\,\nabla^2\phi_i + f\} = \sum_i a_i \int \psi_j \nabla^2\phi_i + \int \psi_j\,f$$

ここで、次の行列とベクトルを定義する。

$$(J)_{i,j} = \int \psi_j \nabla^2\phi_i, \quad k_j = \int \psi_j\,f$$

従って、次の連立 1 次方程式が成立する。

$$J\,\mathbf{a} + \mathbf{k} = 0$$

ここでは、二つの基底を導入したが、両者は同一でも良い。

ここで紹介した Ritz 法や Galerkin 法は、計算機を使う為だけでなく、手で計算する場合にも利用可能である事に注意しよう。

講義では、この後に簡単な数値例を与えたが、ここでは手抜きをしておこう。

簡単な電磁石の設計

磁場の計算が終ると、具体的な設計が待っている。これに関する注意事項を幾らか、書いておこう。

1) 起磁力。

$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$ を積分すれば良い。鉄芯があると、鉄材中では $\mathbf{H}$ の値が $1/\mu_{rel}$ に小さくなるので、第 0 近似としては、この部分からの線積分は無視出来る。この近似では、磁極間隙を g とすると、強さ B の磁束密度を発生させるには、$NI = B\,g/\mu_0$ だけの起磁力を必要とする。μ_0 は、真空の透磁率である。

$g = 0.1\,m,\ \ B = 1\,Tesla,\ \ \mu_0 = 4\pi/10^7$ H/m だとすると、$NI = 8 \times 10^4 AT$ という起磁力が必要である。即ち、１０００アンペアの電流を８０回巻きのコイルに流す必要がある。

２) 継鉄。

継鉄の設計には、１) 磁気的飽和と ２) 力学的強度について、注意しておこう。

磁気的飽和に関して、磁気回路と磁気抵抗という概念を知っていれば多分大丈夫だろう。

力学的強度に関しては、上の計算例をもう一度引用しよう。磁極の面積を $1\,m^2$ だとする。磁極間隙を $10\,cm$ であるとすると、磁極間隙には、次の大きさのエネルギー W_m が蓄えられている。

$$W_m = \frac{B^2}{2\,\mu_0} \times 0.1 = 4 \times 10^4\,[J]$$

磁極間の引力は、約 ４０トン重となる。

この磁極間隙を真空に排気すると、更に１０トン重の力が加わる。これだけの引力に耐えて、力学的な歪みが、許容値以下に押えられねばならない。C 型にするか H 型にするかも、利用状況により考えねばならない。

大きな磁石となると、建物の床強度や移動・運搬等も設計時に考えておかねばならない。

３) コイル。

DC 磁場を想定する。先の例から、$10^5\,AT$ を要求してみよう。１０００アンペアの電流に対して１００回巻のコイルという事である。使用するコイル材は、中空銅線となるだろう。無垢の銅線だと、２.５ A/mm^2 程度の最大電流密度とするだろうから, 導線の断面積は約 ４００ mm^2 , 2 センチ角となる。中空導線だと、この倍程度の電流密度としても良いだろう。中空導線は冷却には便利だが、長い物は入手出来ない。平角導線を使用する方が、円形断面のものを利用するよりも、空間利用という意味で、有利である。

運転中に温度が上がりすぎると、電気抵抗が上がるから、電源安定度に不安要因となるかもしれない。

コイルの周長を４メートルとし、2 センチ角の銅線を１００回巻くと、抵抗は ０.０１オームとなり, １０００アンペアの電流を流すには, １０ボルトの電源が必要である. ０.０１オームという抵抗は、小さすぎるとして、電源側から文句が出される可能性がある。

定常運転時の発熱は １００００ワットであるから, ２４００ cal/s と換算出来る。この発熱量を摂氏１０度の温度上昇の冷却水で冷却すると仮定すると、１分間当たり、最低でも１４.４リットルの水を流す必要がある。冷却水路もそれなりに、設計しておく必要がある。冷却水は、流量の確保は当然であるが、熱交換が充分に行われる様にしないといけない。特にパイプ内面にスケールがつくと、熱慣流係数が極度に低下する！

磁極と継鉄の間に、コイルと冷却水系が入る空間を用意しておく必要がある。

水質保全や電気化学的な腐食にも注意する必要がある。

４) 電源

先の例では、１０ボルト、１０００アンペアの定電流電源が必要であった。電源には、安定度が大切な要素であるが、電流変動を検出するセンサーとして、シャント抵抗方式と、DCCT 方式が考えられる。シャント抵抗方式では、発熱にも要注意である。接触抵抗の温度依存性は、かなり注意深い人でも忘れがちである。

広い磁場範囲を実現する必要があるならば、制御回路の時定数も一つでは対応が難しいかもしれない。立ち上げ時には、早く変化し、定常運転時には高精度安定性を実現させたい。

磁場を時間的に掃引する時には、コイルの時定数も知っておくべきだろう。磁極間隙に蓄

えられるエネルギーを $4\times10^4 J = L\,I^2/2$ とすると、自己インダクタンスは $L = 0.08H$ と計算出来るから、時定数は約 8 秒である。これよりも早い時間的な変化を要求するならば、高い電源電圧を必要とする。

早い時間変化の磁場を利用する時には、渦電流にも注意が必要である。

5) 渦電流の時定数

昔、サイクロトロンを運転していて、昨日と同じパラメータにしたのに、再現性が悪い。時間をかけて、最調整してみると、結局のところ昨日と同じパラメータに落ち着いた。このような、厭味な経験をした覚えがある。

友人から、渦電流の時定数の勘定をしてみたら $\cdots$ という, 話題提供をうけたので、ここに、簡単に記録しておこう。

Maxwell の方程式を以下の通りとする。

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho,\quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0,\quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

構成方程式は、

$$\mathbf{D} = \epsilon\,\mathbf{E},\quad \mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$$

ここで、物質の定数 $\epsilon,\quad \mu$ は環境に依らないとしておく。オームの法則も成立すると仮定する。

$$\mathbf{i} = \sigma\,\mathbf{E}$$

これらの式から、$\mathbf{H}$ に関する次の式を得る。

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{i} + \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{E} = -\mu\left(\sigma + \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

を経由して、

$$\left(\nabla^2 - \epsilon\,\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{H} - \mu\,\sigma\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H} = 0$$

次の解を仮定してみる。

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0\,e^{(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \lambda\,t)}$$

k と λ の間に次の関係が成立すると、解は存在する。

$$\lambda^2 - \frac{\sigma}{\epsilon}\,\lambda + \frac{k^2}{\epsilon\,\mu} = 0$$

又は、

$$\lambda = \left\{\frac{\sigma}{\epsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2 - \frac{4\,k^2}{\epsilon\,\mu}}\right\}/2$$

この内、大きい方の解はすぐに減衰するから問題外とし、小さい方の解を調べる。

$\epsilon = 10^{-11}\,F/m,\quad \sigma = 10^8\,(\Omega\,m)^{-1},\quad k = 1\,m^{-1},\quad \mu = 10^3\,\times\frac{4\pi}{10^7} = 10^{-3}\,H/m$

としてみると、$\lambda_{small} = 10^{-4}s^{-1}$ となる。即ち、減衰時間は約 3 時間である。どこか、間違っているかな？渦電流というタイトルのはずが、鉄材中の減衰振動する磁場で議論しているというのは、認めて下さい。

磁場測定

電磁石を設計した後、設計通りに磁場が発生するかどうかを確認する為に磁場分布を測定する事がある。

一様な磁場であるか、勾配を有する磁場であるかにより測定法が異なる。一般的な傾向として、一様な磁場に対しては陽子磁気能率を利用した核磁気共鳴法が使用される。この場合には、磁場の絶対値を得る事が可能である。

磁場勾配がある時には、Hall 素子を用いるのが一般的だと思う。他に、サーチコイルと弾道検流計を用いる事もあり得るが、今では利用される事はないだろう。

主要な二つの場合を簡単に説明しておこう。

核磁気共鳴法

参考書としては、Slichter と Abragam の教科書を挙げておこう。Slichter の教科書の方が易しいが、物理屋には丁寧過ぎると思う。

陽子の磁気能率は、$\mu_p = 1.410606633(58) \times 10^{-26} J \cdot T$ と、非常に高精度で知られている。磁場強度をこの数値をよすがとして、時間間隔に変換する装置である。現在では、専業メーカーから既製品を購入できる。

ゼーマン効果によりエネルギーの縮退が解けた二つの相隣る磁気量子数のみが異なる準位間の遷移を起こさせ、その時に吸収される高周波磁場の周波数を測定する。$2\,\mu_p\,B = \hbar\omega$ とし、上の陽子磁気能率の値を用いると、$f = \omega/2\pi = 42.612\cdots[MHz]/T$ という周波数になる。トランジスタを用いて作れる周波数帯域の回路である。周波数読み取りに 1 秒間使用してもよいが、通常は $1/4.26\cdots$ 秒間使用すると、桁換算だけで磁場が直読出来様にする。

共鳴点を見付ける為に発振周波数又は磁場に変調をかける。周波数変調をかけるには、バリキャップの様な素子を利用するのが簡単だが、高周波部分にノイズ要素を導入する事に事になりかねないので、磁場変調をかける場合が多い。磁場変調をかけるには、主磁場の方向に 5 0 Hz、振幅が 1 ガウス程度の低周波磁場をかけ、これに垂直に先に述べた rf 磁場をかける。二つのコイルが必要だから、磁場検出部が周波数変調型よりも大きくなるのが欠点である。

磁場変調の振幅を知っていると、信号の幅から磁場勾配が推定出来る。磁場検出部の近くに、磁性物質を置かない様にしよう。

回路には、位相をずらす装置 (phase shifter) を組み込んでおくと測定が易しくなる。

NMR 回路からの吸収信号を用いて、磁場の時間的な安定性を確保する事が可能である。即ち、変調回路の timing 情報と、rf 磁場の吸収信号の timing のずれを検出して、磁場を発生させる定電流電源に負帰還をかける。多分この方法が最も安定な定電流発生装置を実現する方法であろう。

このアイデアをもう一歩積極的に利用すると、磁場掃引にも利用可能である。即ち、磁場をこの NMR の吸収信号に固定しておいて、人為的に参照 timing をずらす。このようにすると、制限はあるが、時間的に任意の構造を持つ磁場を発生させる事が可能である。

1 T の磁場に対して 42.6 MHz というのは、周波数が高くてやりにくいという場合には、例えば重陽子を使用すればかなり周波数を下げられる。他の原子核を利用する事もあり得るだろう。

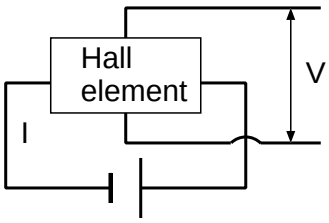
この場合の注意を最後に一つ。陽子試量として水を利用する場合がある。この場合、水に硫酸銅を溶かしておく。上のゼーマン準位に上がった磁気能率を環境に置かれた磁気能率と作用させて、下の準位の落すためである。もしも、磁気能率が rf 電磁波とのみ相互作用して

いたのでは、吸収信号は発生しない事に注意しよう。陽子以外の原子核の磁気能率を利用する場合にも、この様な作用をする”鼻薬”を用意しておこう。

Hall 素子を利用する場合

Hall 効果は、電流担体の符号の決定やその数密度を測定するための物理実験として経験した人は多いだろう。

図を見ながら、簡単に復習しておこう。



Hall element と書いた部分は、平面状に加工された半導体である。この Hall element に直流電流 I を流す。この Hall element の面に直交する様に外部から磁場 B をかけると、図の様に V の電圧が発生する。この電圧 V は、電流と磁場の積に比例するから、較正が正しく出来るならば、磁場測定に利用できる。

既製品を利用するのが、安直であるが、自作する場合もあるだろうから幾らかの助言をしておこう。

先ずは、信頼できる Hall element を入手する事である。Hall 係数が大きい事は良い事であるが、それよりも大切な事はその温度係数であると思う。ある程度大きな電流を流す方が、安定電流電源の設計が易しいと思う。更に、素子の物理的な大きさもある方が、素子を磁場に垂直に置く時の誤差が小さいだろう。個人的には、製造後半年間通電後の製品を入手した場合がある。

半導体の電気的定数は、一般に温度係数が大きいので、素子の温度管理をする必要があるだろう。温度係数の大きな抵抗素子 (例えばサーミスター) を直接 Hall element に貼付けて、この抵抗を温度検出及び発熱体として利用するというアイデアが有効かもしれない。ある程度の熱容量がある容器に入れて使用する時には、使用する部品全体の磁気的性質にも注意を払っておこう。

定電流電源の設計には、信頼できる部品を使用するのが一番である。例えば Zener diode もどきの IC を利用すると、温度係数が 1 ppm 程度の電圧を発生させる事が出来る。1 ppm 程度の温度係数を持つ抵抗も数千円払えば入手可能である。これらを組み合わせると、かなり温度係数の小さな定電流電源を設計するのは易しいだろう。

Hall 電圧を測定する部分は、あまり電流をとってはいけない。ある程度の電流をとるほうが、比例性が良い場合があるので、電圧測定回路に並列に抵抗を入れる場合がある。発生電圧が、磁場に比例するというのは原理的にはという制限付の話である。ちゃんと較正してから使用すべきである。

入力インピーダンスの大きな電圧測定器は簡単に入手できるから、この部分で問題が発生する事は稀であろう。

大きな磁石の磁場地図を作る場合に、測定素子を磁場中で動かす必要がある。駆動装置の一部は、磁場中に置かれる事になる。このネジを電気的な導体で作ると、渦電流が流れるから駆動トルクが非常に大きくなる。有能な物理屋でも、この渦電流の事を失念する場合がある

ようだ。

磁場分布を測定してみると、磁場分布そのものが励起の履歴に依存する事に気が付く。経験では、1 T 以上の磁場でこの履歴現象は顕著であった。高精度の測定をしたいならば、必ず消磁しておこう。手順は、例えば次の様にする。先ず最大電流の電流を流し、安定な磁場が発生する程度の時間放置する。次に電流の極性を替えへ、先に流した電流の 2 / 3 程度の電流を流す。この操作を複数回繰り返す。かなりの回数繰り返しても、地磁気の為に、残留磁場の大きさが減らなくなったらこの操作を止める。自分で経験してみよう。

Hall 素子の大きさが気になるならば、素子のどの部分が電圧発生に寄与しているかを調べてみよう。永久磁石の磁極面に垂直に剃刀の刃の様な薄い磁極をつけ、この局所化された磁場を、Hall 素子を持ちて測定し、最大電圧を発生させる方向を素子上に描く。2 本の直交する線が描けると、最大感度点が検出出来る。

Hall 素子が磁場に直交する様に置く事にも注意を払っておこう。

磁場分布を人為的に制御するために、return yoke と pole piece 間に空隙 (shim gap/ homogenizer gap と呼ぶ人もいた) を設けるという案が検討されたが、成功したという報告は聴いていない。

一方、電場の形を整えるのは、数値計算さえ出来るならばかなり易しいと思う。

電極形状をこった形にするのでなく、付加的な電極を追加し、この付加電極に可変電圧を掛けるのが良いだろう。