量子力学A（大学院）期末試験

2016年8月4日（木）（担当：関場大一郎，小林伸彦）

教科書，ノートの使用は不可。問3のみ別の解答用紙に記入せよ。

問1 2準位系のハミルトニアンがaをエネルギーの次元の数として、

$H = a\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$で与えられている。このハミルトニアンのエネルギー固有値と、対応するエネルギー固有ケットを$|1\rangle$と$|2\rangle$の線形結合として見出せ。

問2 ハイゼンベルク表示においてスピンの歳差運動を考える。z方向の一様で時間変化のない磁場中におかれたスピンのハミルトニアンを$H = \omega S_z$とする。シュレーディンガー表示のスピン演算子をS_x、S_y、S_z、ハイゼンベルク表示のそれを$S_x(t)$、$S_y(t)$、$S_z(t)$と表すことにする。

（1） ハイゼンベルク表示の演算子$A^{(H)}$に対する運動方程式$\dfrac{dA^{(H)}}{dt} = \dfrac{1}{i\hbar}\left[A^{(H)}, H\right]$より$S_x(t)$が2階の微分方程式$\dfrac{d^2 S_x(t)}{dt^2} = -\omega^2 S_x(t)$を満たすことを示せ。ここでスピン演算子の交換関係$[S_i(t), S_j(t)] = i\,\varepsilon_{ijk}\,\hbar S_k(t)$を用いてよい。

（2） 時刻$t = 0$でハイゼンベルク表示とシュレーディンガー表示が一致するという初期条件のもと、（1）の微分方程式の解をシュレーディンガー表示の演算子を用いて求めよ。（ヒント：1階微分の初期条件も用いると積分定数が2つとも求まる。）

（3）時刻$t = 0$でスピンがxの正方向を向いていたとする。$S_x(t)$の期待値を求めよ。

ただし、$|x+\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$

および$S_x = \dfrac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)$，$S_y = \dfrac{\hbar}{2}\left(-i|+\rangle\langle -| + i|-\rangle\langle +|\right)$を用いてよい。

$|+\rangle$、$|-\rangle$はz方向の上向きと下向きの状態ケットである。

問3 角運動量の大きさが$\hbar$（$l = 1$）のとき、基底$|l=1, m=1\rangle, |l=1, m=0\rangle, |l=1, m=-1\rangle$に関する角運動量演算子$l_x, l_y, l_z$の行列表現を求めよ。 ここで、昇降演算子$l_+ = l_x + il_y$，$l_- = l_x - il_y$は

$l_+|l,m\rangle = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,|l,m+1\rangle$、$l_-|l,m\rangle = \hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,|l,m-1\rangle$

の関係があることを用いて計算せよ。