# 量子力学A（大学院）期末試験

2014年7月31日（木）（担当：関場大一郎，小林伸彦）

教科書，ノートの使用は不可。

問1

(1) $|i\rangle$ と $|j\rangle$ をあるエルミート演算子 $A$ の固有ケットとする。どのような条件のもとで $|i\rangle + |j\rangle$ もまた $A$ の固有ケットとなるか。

(2) 演算子 $X$，$Y$ について，$(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$ となることをブラとケットを用いて示せ。

問2

(1) ハイゼンベルク表示の観測量 $A^{(H)}(t)$ はシュレーディンガー表示の観測量 $A^{(S)}$ と、時間発展の演算子 $U(t)$ を介して $A^{(H)}(t) = U^\dagger(t) A^{(S)} U(t)$ の関係にある。ここで $U(t)$ はシュレーディンガー方程式 $i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t} U(t) = H\,U(t)$ を満たし、簡単のためハミルトニアン $H$ と $A^{(S)}$ はあらわには時間に依存しないものとする。ハイゼンベルクの運動方程式 $\dfrac{dA^{(H)}}{dt} = \dfrac{1}{i\hbar}\left[A^{(H)}, H\right]$ を導け。

(2) $F(\boldsymbol{p})$、$G(\boldsymbol{x})$ がそれぞれ $p_i$、$x_i$ によるテーラー展開が可能な関数のとき、次が成り立つことを示せ。$\left[x_i, F(\boldsymbol{p})\right] = i\hbar \dfrac{\partial F}{\partial p_i}$、$\left[p_i, G(\boldsymbol{x})\right] = -i\hbar \dfrac{\partial G}{\partial x_i}$ 。

(3) ハミルトニアンを $H = \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{x})$ とする。観測量の期待値は表示によらないことに注意し、エーレンフェストの定理 $m\dfrac{d^2}{dt^2}\langle \boldsymbol{x} \rangle = \dfrac{d}{dt}\langle \boldsymbol{p} \rangle = -\langle \nabla V(\boldsymbol{x}) \rangle$ を導け。

問3　スピン1/2の系に関して下記問いに答えよ。

(1) $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ の固有スピノルで、固有値＋1を持つものを求めよ。

(2) 1個の電子が $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ のスピン状態にあるとき、$s_y$ を測定して $\dfrac{\hbar}{2}$ が得られる確率を求めよ。