量子力学Ⅰ（大学院）期末試験

2011 年 6 月 30 日（担当：関場大一郎）

3 枚の解答用紙は自由に使ってよい。ただし 3 枚とも氏名と学籍番号を記入して提出すること。

問1 A を観測量とする。演算子 $\Delta A = A - \langle A \rangle$ に対して $(\Delta A)^2$ の期待値を A の分散という。スピン 1/2 の系において、z 方向の上向きと下向きの状態ケットをそれぞれ $|+\rangle$、$|-\rangle$ とする。$|+\rangle$ の状態について $S_x = \dfrac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)$ および S_z の分散を求めよ。

問2 2 準位系のハミルトニアンが a をエネルギーの次元の数として、

$H = a\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$ で与えられている。このハミルトニアンのエネルギー固有値と、対応するエネルギー固有ケットを $|1\rangle$ と $|2\rangle$ の線形結合として見出せ。

問3 ハイゼンベルク表示においてスピンの歳差運動を考える。z 方向の一様で時間変化のない磁場中におかれたスピンのハミルトニアンを $H = \omega S_z$ とする。シュレーディンガー表示のスピン演算子を S_x、S_y、S_z、ハイゼンベルク表示のそれを $S_x(t)$、$S_y(t)$、$S_z(t)$ と表すことにする。

（１） ハイゼンベルク表示の演算子 $A^{(H)}$ に対する運動方程式 $\dfrac{dA^{(H)}}{dt} = \dfrac{1}{i\hbar}\left[A^{(H)}, H\right]$ より $S_x(t)$ が 2 階の微分方程式 $\dfrac{d^2 S_x(t)}{dt^2} = -\omega^2 S_x(t)$ を満たすことを示せ。ここでスピン演算子の交換関係 $[S_i(t), S_j(t)] = i\,\varepsilon_{ijk}\,\hbar S_k(t)$ を用いてよい。

（２） 時刻 $t = 0$ でハイゼンベルク表示とシュレーディンガー表示が一致するという初期条件のもと、（１）の微分方程式の解をシュレーディンガー表示の演算子を用いて求めよ。（ヒント：１階微分の初期条件も用いると積分定数が 2 つとも求まる。）

（３） 時刻 $t = 0$ でスピンが x の正方向を向いていたとする。$S_x(t)$ の期待値を求めよ。ただし、$|x+\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$ および $S_y = \dfrac{\hbar}{2}\left(-i|+\rangle\langle -| + i|-\rangle\langle +|\right)$ を用いてよい。$|+\rangle$、$|-\rangle$ は z 方向の上向きと下向きの状態ケットである。（ヒント：S_x についての表式は問 1 にある。）