電磁気学A　演習問題集③

6月1日（月）の24時までにメール添付でレポート提出。PDFが望ましい。

問1　半径Rの無限に長い円筒の内部に電荷が一様な密度ρで分布している。この電荷分布による静電ポテンシャルをポアソンの方程式を解くことにより求める。円筒の中心軸がz軸に一致するように直交座標系をとると、静電ポテンシャルはz軸からの距離$r=\sqrt{x^2+y^2}$の関数$\phi(r)$で与えられる。

(1) $\nabla^2\phi(r)$を以下の手順でrによる微分の式に変更する。

(i) $\dfrac{\partial}{\partial x}\phi(r)$を$r$による微分の式に変形せよ。

(ii) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(r)$を$r$による微分の式に変形せよ。

(iii) yについても(ii)と同様の計算を行い、$\nabla^2\phi(r)=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left\{r\dfrac{d\,\phi(r)}{dr}\right\}$を示せ。

(2)　ポアソン方程式を以下の手順で解け。ただし静電ポテンシャルの基準は円筒の側面（$r=R$）で0とする。

(i) 円筒の内外で$\phi(r)$の満たすべき微分方程式を書け。

(ii) (i)を積分して$\dfrac{d\,\phi(r)}{dr}$を求めよ。積分定数を含む形でよい。

(iii) $\dfrac{d\,\phi(r)}{dr}$は円筒の中心軸で0となること、また円筒の側面では連続であることを持ちいて(ii)の積分定数を決めよ。

(iv) $\dfrac{d\,\phi(r)}{dr}$を積分し、境界条件（基準）から$\phi(r)$を求めよ。

問2　原点に点電荷qが存在し、原点以外の点$\boldsymbol{r}=(x,\,y,\,z)$の電荷密度は$-\dfrac{\kappa^2 q}{4\pi}\dfrac{e^{-\kappa r}}{r}$で与えられるとする。ただし、$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$であり、$\kappa$は正の定数である。中心対称となる静電ポテンシャル$\phi(r)$を求める。

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}\phi(r)$を$r$、$x$、$\dfrac{d\,\phi(r)}{dr}$で表せ。

(2) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(r)$を$r$、$x$、$\dfrac{d\,\phi(r)}{dr}$、$\dfrac{d^2\,\phi(r)}{dr^2}$で表せ。

(3)　y と z についても同様の計算をし、$\nabla^2\phi(r)=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\{r\,\phi(r)\}$ となることを示せ。

(4)　原点以外で $\phi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\kappa r}}{r}+c_1+\frac{c_2}{r}$ となることを示せ。ただし c_1、c_2 は積分定数。

(5) 境界条件 $\lim_{r\to\infty}\phi(r)=0$ より、積分定数 c_1 を求めよ。

(6)　原点における境界条件は原点を中心とする半径 R の球面に積分形のガウスの法則を適用し、$R\to+0$ の極限をとることにより与えられる。電場の強さを $E(r)$ とし、原点には点電荷 q のみが存在すること、電場の強さは静電ポテンシャルの勾配を持ちいて求められることから積分定数 c_2 を決めよ。