# 量子力学A（大学院）期末試験

2017年8月3日（木）（担当：関場大一郎，小林伸彦）

教科書、ノートの使用は不可。問3のみ別の解答用紙に記入せよ。

問1

(1) ハイゼンベルク表示の観測量$A^{(H)}(t)$はシュレーディンガー表示の観測量$A^{(S)}$と、時間発展の演算子$U(t)$を介して$A^{(H)}(t)=U^{\dagger}(t)A^{(S)}U(t)$の関係にある。ここで$U(t)$はシュレーディンガー方程式$i\eta\frac{\partial}{\partial t}U(t)=HU(t)$を満たし、簡単のためハミルトニアン$H$と$A^{(S)}$はあらわには時間に依存しないものとする。ハイゼンベルクの運動方程式$\frac{dA^{(H)}}{dt}=\frac{1}{i\eta}\left[A^{(H)},H\right]$を導け。

(2) $F(\boldsymbol{p})$、$G(\boldsymbol{x})$がそれぞれ$p_i$、$x_i$によるテーラー展開が可能な関数のとき、次が成り立つことを示せ。$\left[x_i,F(\boldsymbol{p})\right]=i\eta\frac{\partial F}{\partial p_i}$、$\left[p_i,G(\boldsymbol{x})\right]=-i\eta\frac{\partial G}{\partial x_i}$　。

(3) ハミルトニアンを$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(\boldsymbol{x})$とする。観測量の期待値は表示によらないことに注意し、エーレンフェストの定理$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\boldsymbol{x}\rangle=\frac{d}{dt}\langle\boldsymbol{p}\rangle=-\langle\nabla V(\boldsymbol{x})\rangle$を導け。

問2　1個の粒子を入れた箱が、薄い隔壁で左右の部屋に分けられている。粒子が確実に右（または左）側にいることが分かっているとき、状態を位置固有ケット$|R\rangle$（または$|L\rangle$）で表すことにする。ここで粒子が半分の箱のどこにいるかは問題にしない。粒子は隔壁を通ってトンネル運動することが出来るとし、このトンネル効果をハミルトニアン$H=\Delta(|L\rangle\langle R|+|R\rangle\langle L|)$で記述する。ここで$\Delta$はエネルギーの次元を持った実数である。

(i)　$|R\rangle$および$|L\rangle$を基底として$H$を行列で表現し、エネルギー固有値を求めよ。

(ii)　それぞれのエネルギー固有値に対応する規格化されたエネルギー固有ケットを求めよ。

(iii) シュレーディンガー表示では基底ケット$|R\rangle$および$|L\rangle$は固定されていて、状態ベクトルが時間変化する。$t=0$で粒子は確かに右側にいたとする。適当な時間発展の演算子をかけることにより、$t>0$に対して状態ベクトルを見出せ。ただし時間発展の演算子$U(t,t_0)$はシュレーディンガー方程式　$i\eta\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=HU(t,t_0)$　を満たすものとする.

裏につづく

問 3

(1) $\boldsymbol{J}$ を各運動量とする。$J_x, J_y, J_z$ $(J_\pm \equiv J_x \pm i\, J_y)$ が通常の各運動量の交換関係を満足すること

とを用いて

$$\boldsymbol{J}^2 = J_z{}^2 + J_+ J_- - \mathrm{h} J_z$$

を証明せよ。

(2) (1)を用いて

$$J_- \left| j\ m \right\rangle = c_- \left| j\ m-1 \right\rangle$$

に現れる係数 $c_-$ に関する有名な表式を導け。