量子力学A（大学院）期末試験

2015年8月6日（木）（担当：関場大一郎，小林伸彦）

教科書，ノートの使用は不可。

問1　スピン$1/2$の原子線が、一続きのシュテルン・ゲルラッハ型測定装置を次のように通過する。

(a) 第1の測定では$s_z = \hbar/2$の原子が選ばれ、$s_z = -\hbar/2$の原子は除かれる。

(b) 第2の測定では$s_n = \hbar/2$の原子が選ばれ、$s_n = -\hbar/2$の原子が除かれる。ここでs_nは演算子$\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$の固有値であり、$\hat{\boldsymbol{n}}$は$xz$-平面内で$z$-軸と角度$\beta$をなす。また、次の規格化された式を証明なしに用いてよい。

$$\left|\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}};+\right\rangle = \cos\frac{\beta}{2}\left|+\right\rangle + \sin\frac{\beta}{2}\left|-\right\rangle$$

$$\left|\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}};-\right\rangle = -\sin\frac{\beta}{2}\left|+\right\rangle + \cos\frac{\beta}{2}\left|-\right\rangle$$

(c) 第3の測定では$s_z = -\hbar/2$の原子が選ばれ、$s_z = \hbar/2$の原子が除かれる。

第1の測定後に残った$s_z = \hbar/2$の原子線の強度を1に規格化したとき、最後の$s_z = -\hbar/2$の原子線の強度はいくらか。最後の$s_z = -\hbar/2$の原子線の強度を最大にするには第2の装置をどの方向に向けなければならないか。ただし、必要であれば以下の関係を用いてよい。

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left(\left|+\right\rangle\left\langle-\right| + \left|-\right\rangle\left\langle+\right|\right),$$

$$S_y = \frac{i\hbar}{2}\left(-\left|+\right\rangle\left\langle-\right| + \left|-\right\rangle\left\langle+\right|\right),$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\left(\left|+\right\rangle\left\langle+\right| - \left|-\right\rangle\left\langle-\right|\right)$$

問2　1個の粒子を入れた箱が，薄い隔壁で左右の部屋に分けられている．粒子が確実に右（または左）側にいることが分かっているとき，状態を位置固有ケット$\left|R\right\rangle$（または$\left|L\right\rangle$）で表すことにする．ここで粒子が半分の箱のどこにいるかは問題にしない。粒子は隔壁を通ってトンネル運動することが出来るとし，このトンネル効果をハミルトニアン$H = \Delta\left(\left|L\right\rangle\left\langle R\right| + \left|R\right\rangle\left\langle L\right|\right)$で記述する．ここで$\Delta$はエネルギーの次元を持った実数である．

(i) $\left|R\right\rangle$および$\left|L\right\rangle$を基底としてHを行列で表現し，エネルギー固有値を求めよ．

(ii) それぞれのエネルギー固有値に対応する規格化されたエネルギー固有ケットを求めよ．

(iii) シュレーディンガー表示では基底ケット$\left|R\right\rangle$および$\left|L\right\rangle$は固定されていて，状態ベクトルが時間変化する．$t=0$で粒子は確かに右側にいたとする．適当な時間発展の演算子をかけることにより，$t>0$に対して状態ベクトルを見出せ．ただし時間発展の演算子$U(t,t_0)$はシュレーディンガー方程式　$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H\,U(t,t_0)$　を満たすものとする．

問 3 z 方向の一様磁場 B 中にあるスピン 1/2 の系がハミルトニアン $H=-\frac{e}{m_e c}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}=\omega S_z$ $\omega\equiv\frac{|e|B}{m_e c}$ のもと歳差運動をするとき、時刻 t のスピンの期待値 $\langle S_x\rangle_t, \langle S_y\rangle_t, \langle S_z\rangle_t$ を時刻 $t=0$ の期待値 $\langle S_x\rangle_{t=0}, \langle S_y\rangle_{t=0}, \langle S_z\rangle_{t=0}$ を用いて表せ。また、時刻 t の状態ケット $|\alpha, t_0=0; t\rangle$ を $t=0$ の状態ケット $|\alpha\rangle$ を用いて表し、両者の変化の周期を比較せよ。

必要であれば、スピン演算子 $S_x=\frac{\hbar}{2}\{|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle+|\}$，$S_y=\frac{i\hbar}{2}\{-|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle+|\}$，$S_z=\frac{\hbar}{2}\{|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|\}$ を使用してよい。