量子力学 I, 量子力学 A（大学院）期末試験

2013 年 8 月 1 日（担当：関場大一郎，小林伸彦）

量子力学 I の受講者は問 1 と問 2 のみを解答せよ。解答時間は 60 分。量子力学 I と II 両方を受講している者および量子力学 A の受講者は問 1, 問 2, 問 3 のすべてに解答せよ。解答時間は 75 分。量子力学 II のみの受講者は問 3 のみを解答せよ。解答時間は 25 分。問 1，問 2，問 3 はそれぞれ別の解答用紙に回答せよ。教科書，ノートの使用は不可。

問 1

位置演算子 $\boldsymbol{x}$ の固有ケット $|\boldsymbol{x}'\rangle$ に対し、$d\boldsymbol{x}'$ だけの無限小平行移動演算子 $T(d\boldsymbol{x}')$ を次のように定義する，$T(d\boldsymbol{x}')|\boldsymbol{x}'\rangle = |\boldsymbol{x}'+d\boldsymbol{x}'\rangle$。以下の問いに答えよ。

(1) 無限小平行移動演算子をエルミート演算子 $\boldsymbol{K}$ を用いて $T(d\boldsymbol{x}') = 1 - i\,\boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{x}'$ と書くと、$d\boldsymbol{x}'$ の 1 次のオーダーで $T(d\boldsymbol{x}')$ が満たすべき次の 4 つの性質を満足することを示せ。

(i) ユニタリー性

(ii) $T(d\boldsymbol{x}'')T(d\boldsymbol{x}') = T(d\boldsymbol{x}'+d\boldsymbol{x}'')$

(iii) 逆方向移動が定義できる。

(iv) 恒等操作が定義できる。

(2) $\boldsymbol{x}$ と $T(d\boldsymbol{x}')$ の間の交換関係を $d\boldsymbol{x}'$ の 1 次のオーダーで導け。

(3) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{K}$ の間の交換関係を導け。ただし、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{K}$ は 3 次元直交座標系のベクトルとする。

問 2

1 個の粒子を入れた箱が，薄い隔壁で左右の部屋に分けられている．粒子が確実に右（または左）側にいることが分かっているとき，状態を位置固有ケット $|R\rangle$（または $|L\rangle$）で表すことにする．ここで粒子が半分の箱のどこにいるかは問題にしない。粒子は隔壁を通ってトンネル運動することが出来るとし, このトンネル効果をハミルトニアン $H = \Delta(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|)$ で記述する. ここで Δ はエネルギーの次元を持った実数である．

(1) $|R\rangle$ および $|L\rangle$ を基底として H を行列で表現し，エネルギー固有値を求めよ．

(2) それぞれのエネルギー固有値に対応する規格化されたエネルギー固有ケットを求めよ．

(3) シュレーディンガー表示では基底ケット $|R\rangle$ および $|L\rangle$ は固定されていて，状態ベクトルが時間変化する． $t=0$ で粒子は確かに右側にいたとする．適当な時間発展の演算子をかけることにより，$t>0$ に対して状態ベクトルを見出せ．ただし時間発展の演算子 $U(t,t_0)$ はシュレーディンガー方程式 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H\,U(t,t_0)$ を満たすものとする．

問 3

2 つの電子のスピン角運動量を合成しよう。それぞれのスピン演算子を $\boldsymbol{s}_1$、$\boldsymbol{s}_2$ として $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2$ とするとき $\boldsymbol{s}_1^2, \boldsymbol{s}_2^2, \boldsymbol{s}^2, s_z$ の同時固有ケットを $\boldsymbol{s}_1^2, \boldsymbol{s}_2^2, s_{1z}, s_{2z}$ の同時固有ケットで表せ。