

量子力学 I (大学院) 期末試験

2012 年 6 月 28 日 (担当: 関場大一郎)

3 枚の解答用紙は自由に使ってよい。ただし 3 枚とも氏名と学籍番号を記入して提出すること。

問1 $|i\rangle$ と $|j\rangle$ をあるエルミート演算子 A の固有ケットとする。どのような条件のもとで $|i\rangle + |j\rangle$ もまた A の固有ケットとなるか。

問2 図に示した角度方向にある \hat{n} (単位ベクトル) に対し、 $|\mathbf{S} \cdot \hat{n}; +\rangle$ を

$$\mathbf{S} \cdot \hat{n} |\mathbf{S} \cdot \hat{n}; +\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\right) |\mathbf{S} \cdot \hat{n}; +\rangle$$

となるように $|+\rangle$ と $|-\rangle$ (S_z の固有ケット) の線形結合で作りたい。

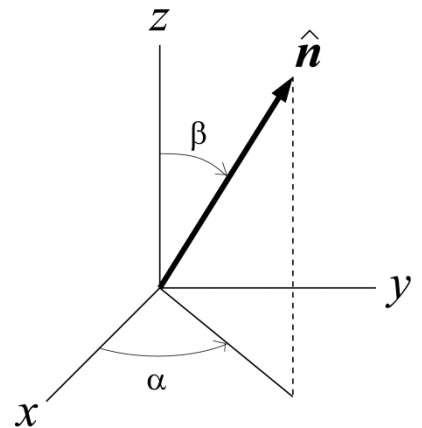
以下の問いに答えよ。

(1) \hat{n} の x, y, z 成分を求めよ。(ヒント: 最初 $(0, 0, 1)$ という単位ベクトルだったものをまず xz 平面内で y 軸の周りに β だけ回転させたあと、 z 軸まわりで α だけ回転させた場合を考えればよい。)

(2) $\mathbf{S} \cdot \hat{n}$ を $|+\rangle$ と $|-\rangle$ を基底として 2×2 行列で表現せよ。ただし、以下の関係を用いてよい。

$$S_x = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|), \quad S_y = \frac{\hbar}{2} (-i|+\rangle\langle -| + i|-\rangle\langle +|)$$

(3) (2) で求めた行列の固有値と固有ベクトルを計算し、 $|\mathbf{S} \cdot \hat{n}; +\rangle$ を $|+\rangle$ と $|-\rangle$ の線形結合で表せ。



問3 に $|a'\rangle$ と $|a''\rangle$ をエルミート演算子 A の固有状態とし、それぞれの固有値を a' 、 a'' ($a' \neq a''$)

とする。ハミルトニアンは δ を実数として $H = |a'\rangle\delta\langle a''| + |a''\rangle\delta\langle a'|$ で与えられている。

(1) 明らかに $|a'\rangle$ と $|a''\rangle$ はハミルトニアンの固有状態ではない。ハミルトニアンの固有状態を書き下せ。エネルギー固有値はいくらか。

(2) 系が $t = 0$ で状態 $|a'\rangle$ にあったとする。状態ベクトルを $t > 0$ に対し、シュレーディンガー表示で表せ。ただし時間発展の演算子 $U(t, t_0)$ はシュレーディンガー方程式 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H U(t, t_0)$ を満たすものとする。(ヒント: ハミルトニアンは時間に依存しない。)

(3) 系が $t = 0$ で状態 $|a'\rangle$ にあったとする。 $t > 0$ で系を $|a''\rangle$ の状態に見出す確率はいくらか。