

量子力学 I (大学院) 期末試験

2009 年 6 月 25 日 (担当: 関場大一郎)

3 枚すべての解答用紙に学籍番号と氏名を記入せよ。各問を別々の解答用紙に解答せよ。必要であれば裏面も用いてよい。

問1 次式を証明せよ

- (i) $[A+B, C] = [A, C] + [B, C]$
- (ii) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
- (iii) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (ヤコビの恒等式)

問2 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ の規格直交性を用い、

$$[S_i, S_j] = i \varepsilon_{ijk} \hbar S_k, \quad \{S_i, S_j\} = \left(\frac{\hbar^2}{2}\right) \delta_{ij}$$

を証明せよ。ここで

$$S_x = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|),$$

$$S_y = \frac{i\hbar}{2} (-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|),$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)$$

である。

問3 スピン1/2の原子線が、一続きのシュテルン・ゲルラッハ型測定装置を次のように通過する。

- (a) 第1の測定では $s_z = \hbar/2$ の原子が選ばれ、 $s_z = -\hbar/2$ の原子は除かれる。
- (b) 第2の測定では $s_n = \hbar/2$ の原子が選ばれ、 $s_n = -\hbar/2$ の原子が除かれる。ここで s_n は演算子 $\mathbf{S} \cdot \hat{n}$ の固有値であり、 \hat{n} は xz -平面内で z -軸と角度 β をなす。また、次の規格化された式を証明なしに用いてよい。

$$|\mathbf{S} \cdot \hat{n}; +\rangle = \cos \frac{\beta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\beta}{2} |-\rangle$$

$$|\mathbf{S} \cdot \hat{n}; -\rangle = -\sin \frac{\beta}{2} |+\rangle + \cos \frac{\beta}{2} |-\rangle$$

- (c) 第3の測定では $s_z = -\hbar/2$ の原子が選ばれ、 $s_z = \hbar/2$ の原子が除かれる。第1の測定後に残った $s_z = \hbar/2$ の原子線の強度を1に規格化したとき、最後の $s_z = -\hbar/2$ の原子線の強度はいくらか。最後の $s_z = -\hbar/2$ の原子線の強度を最大にするには第2の装置をどの方向に向けなければならないか。